



## ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής  
Εξέταση στη Ανάλυση I & Εφαρμογές  
28 Απριλίου 2014

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Όλα τα θέματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας.  
Καλή σας επιτυχία.

### ΘΕΜΑ Α

1. Δίδεται η συνάρτηση  $f : [0, 1]$  στο  $\mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{για } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Εξετάστε αν η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη.

2. Έστω η ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f : [a, b]$  για την οποία ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = 6.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν  $t_1, t_2$  στο διάστημα  $(a, b)$  τέτοιοι ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = 2.$$

3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}, \quad (\beta) \int e^x \sin x dx, \quad (\gamma) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x dx$$

### ΘΕΜΑ Β

1. Να βρείτε το όριο της  $a_n = \sqrt[n]{r^n + 4^{2014}}$ , για  $r > 0$ .
2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία  $a_n$  για την οποία  $a_1 = 1$  και η οποία δίδεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_{n+1} = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n}.$$

3. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \left( \frac{n\theta}{n+1} \right)^n,$$

όπου  $0 < \theta < 1$ .

### ΘΕΜΑ Γ

1. Δεδομένου ότι η ακολουθία  $a_n = (1 + x/k_n)^{k_n}$ , έχει ως όριο τον αριθμό  $e^x$ , για οποιαδήποτε ακολουθία  $k_n$  που έχει ως όριο το  $+\infty$ , δείξτε ότι η ακολουθία

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n$$

έχει ως όριο και πάλι τον  $e^x$ .

2. Γράψτε τους 3 πρώτους όρους του διωνυμικού αναπτύγματος του

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

για  $n > 3$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου δείξτε ότι η παράγωγος της

$$g(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

στο  $x = 0$  είναι 1. Δεδομένου ότι μπορείτε να εναλλάξετε το όριο στον ορισμό της παραγώγου με το όριο στον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης, δείξτε ότι η παράγωγος της  $e^x$  στο 0 είναι 1.

3. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό του  $e^x$  δείξτε τώρα ότι  $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ .
4. Γράψτε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor γύρω από το  $x = 0$ , για την συνάρτηση  $f_a(x) = e^{ax}$ , όπου  $a$  κάποια παράμετρος. Κάντε το ίδιο για τις συναρτήσεις  $\cos(x)$  και  $\sin(x)$ . [Θεωρήστε γνωστές τις παραγώγους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.]
5. Στο ανάπτυγμα της σειράς Taylor της  $f_a(x)$  του προηγούμενου ερωτήματος, θέστε  $a = i$ , όπου  $i$  είναι ένας (μη πραγματικός) αριθμός τέτοιος ώστε  $i^2 = -1$  (η φανταστική μονάδα). Αναγνωρίστε στους όρους του αναπτύγματος της  $f_i(x)$  τις συναρτήσεις  $\cos(x)$  και  $\sin(x)$  και γράψτε καταλλήλως την  $f_i(x)$  μέσω των  $\cos(x)$  και  $\sin(x)$ .
6. Από τη σχέση του προηγούμενου ερωτήματος εξάγετε τη γνωστή σας σχέση

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$