ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι

5 Δεκεμβρίου 2014

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Ας δούμε συγκεντρωμένες όλες τις δυνατές περιπτώσεις ορίων συναρτήσεων:

$$\text{(α)}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l\ ,\ \text{(β)}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ ,\ \text{(γ)}\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = l\ ,\ \text{(δ)}\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty .$$

Σχόλιο 1. Οι περιπτώσεις (α,β) δεν συναντώνται στις ακολουθίες αφού ένας συγκεκριμένος φυσικός αριθμός δεν αποτελεί σημείο συσσώρευσης.
Σχόλιο 2. Οι περιπτώσεις του ορίου στο $-\infty$, ή/και του $x \to -\infty$ είναι ισοδύναμο με την απαίτηση η $-f$ να τείνει στο $+\infty$ ή/και του $-x$ να τείνει στο $+\infty$.

Και οι 4 περιπτώσεις ορίων ορίζονται με παρόμοιο τρόπο:

(α) $\leftrightarrow$ Για κάθε $\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon)$, τέτοια ώστε να είναι $|f(x) - l| < \epsilon$ για όλα τα $|x - x_0| < \delta$.
(β) $\leftrightarrow$ Για κάθε $E > 0$, $\exists\delta(E)$, τέτοια ώστε να είναι $f(x) > E$ για όλα τα $|x - x_0| < \delta$.
(γ) $\leftrightarrow$ Για κάθε $\epsilon > 0$, $\exists\Delta(\epsilon)$, τέτοια ώστε να είναι $|f(x) - l| < \epsilon$ για όλα τα $x > \Delta$.
(δ) $\leftrightarrow$ Για κάθε $E > 0$, $\exists\Delta(E)$, τέτοια ώστε να είναι $f(x) > E$ για όλα τα $x > \Delta$.

Σχόλιο 1. Στις παραπάνω προτάσεις η επιλογή των κεφαλαίων E,Δ έγινε προκειμένου να γίνει πιο παραστατικό το γεγονός ότι ψάχνουμε για οσοδήποτε μεγάλα E και Δ προκειμένου να δειχθεί η ύπαρξη των εν λόγω ορίων, σε αντιδιαστολή με τα μικρά ϵ, δ όπου η αναζήτηση γίνεται σε οσοδήποτε μικρές τιμές αυτών.
Σχόλιο 2. Στην περίπτωση (α) και (β) θα πρέπει να εξαιρέσουμε από *όλα τα* $|x-x_0| < \delta$ όλα εκείνα τα x για τα οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση f. Για παράδειγμα όταν αναζητούμε το όριο της $f(x) = \sqrt{x}$ στο 0, δεν χρειάζεται να ισχύει $|f(x) - l| < \epsilon$ για *όλα* τα $|x| < \delta$ παρά μόνο για όλα τα $0 \leq x < \delta$, αφού τα αρνητικά x δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

Στην πραγματικότητα οι προτάσεις αυτές απαιτούν την εύρεση κατάλληλης συνάρτησης $\delta(\epsilon)$ (ή τις παραλλαγές αυτού με κεφαλαία) προκειμένου η αντίστοιχη πρόταση να καταστεί αληθής. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη μεθοδολογία στην εύρεση της συνάρτησης αυτής, αλλά γενικός στόχος είναι να φτιαχτεί ένα ζεύγος ανισοτήτων για τη διαφορά της f από το όριό της και της x από το ζητούμενο σημείο, ώστε η μια να συνεπάγεται την άλλη.

Η συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ισοδύναμη με το να συμπίπτει το όριο της συνάρτησης σε ένα σημείο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Μια και το ∞ δεν είναι αριθμός (οπότε δεν θα μπορούσε να είναι μέρος μιας ταυτότητας!) μόνο η περίπτωση (α) μας ενδιαφέρει στο ερώτημα της συνέχειας. Έτσι θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, αν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

και ότι θα είναι συνεχής σε ένα ολόκληρο διάστημα (a, b), ή $[a, b)$, ή κλπ, αν σε κάθε τιμή αυτού του διανύσματος είναι συνεχής. Έτσι αν από μια καθ' όλα συνεχή συνάρτηση, είτε της αφαιρέσουμε κάποιο σημείο ή το μετακινήσουμε η συνάρτηση θα καταστεί *μη* συνεχής στο εν λόγω σημείο.

Επειδή η έννοια της συνέχειας μοιάζει σχεδόν αυτονόητη, σε τέτοιο μάλιστα βαθμό ώστε ο παραπάνω ορισμός να μοιάζει με νοητικό γλωσσοδέτη, μπροστά σε κάτι τόσο απλό, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με μια κατεξοχήν ασυνεχή συνάρτηση και μάλιστα σε κάθε σημείο.

Έστω

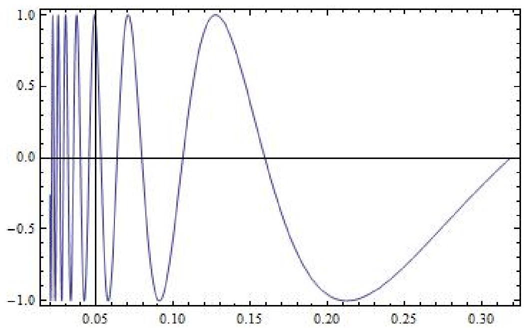
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Στο σημείο αυτό $f(x_0) = 0$. Στόχος είναι να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση $\delta(\epsilon)$ έτσι ώστε για οποιοδήποτε δοθέν ϵ να εξασφαλίζει ότι όλα τα x που βρίσκονται γύρω από το x_0 σε ένα παράθυρο εύρους 2δ απεικονίζονται μέσω της συνάρτησης σε τιμές εύρους $\pm\epsilon$ γύρω από το 0. Αν φυσικά μας έδιναν $\epsilon = 2$, ή γενικότερα μεγαλύτερο του 1, ότι και να διαλέγαμε ως δ θα ήταν σίγουρο ότι τα αντίστοιχα $f(x)$ θα απείχαν από το 0 λιγότερο από ϵ. Όμως αν αμας δώσουν $\epsilon < 1$ είναι κάτι τέτοιο εφικτό; Όχι γιατί αν υποθέσουμε ότι υπήρχε κατάλληλο τέτοιο δ, τότε θα έπρεπε όλα τα x στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να είναι άρρητοι, αφού αν υπήρχε έστω και ένας ρητός η f θα έπαιρνε την τιμή 1 σε αυτόν και επομένως θα απείχε πρισσότερο από ϵ από το 0. Όμως εμείς γνωρίζουμε ότι δίπλα σε κάθε άρρητο υπάρχει ένας ρητός. Αν για παράδειγμα το δ ήταν ένας αριθμός μεταξύ του 10^{-k} και του 10^{-k-1}, αν τον άρρητο x_0 τον στρογγυλοποιούσαμε στο $(k+1)$-οστό του ψηφίο, θα προέκυπτε ένας ρητός σε απόσταση μικρότερη του δ από τον άρρητο x_0. Όμοια μπορούμε να δείξουμε και τη μη συνέχεια στις ρητές τιμές. Η συνάρτηση είναι παντού ασυνεχής.

Ας δυσκολέψουμε λίγο την κατάσταση. Ας φτιάξουμε μια συνάρτηση ως σύνθεση δύο συνεχών (σχεδόν παντού) συναρτήσεων, η οποία όμως εμπεριέχει κάποιο σημείο με όχι προφανές όριο (αν έχει καν). Πρόκειται για την

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

με αμφισβητούμενο σημείο το 0, στο οποίο δεν μπορούμε να ορίσουμε τον πάνω κλάδο της συνάρτησης, οπότε χρειάζεται να ορίσουμε ανεξάρτητα κάποια τιμή στο σημείο αυτό. Γιατί διαλέξαμε τιμή 0 στο σημείο 0; Για καθαρά αισθητικούς λόγους, αφού η συνάρτηση sin ταλαντώνεται στο διάστημα $[-1, +1]$, και



Σχήμα 1: Το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα (0.02,0.32).

μάλιστα ολοένα και πιο γρήγορα κοντά στο 0, βάλαμε τη μέση της τιμή. Θα δούμε ότι δεν έχει και ιδιαίτερη σημασία τι θα επιλέξουμε, αφού τελικά αυτή δεν έχει όριο στο 0.

Όπως θα δείξουμε, η συνάρτηση αυτή δεν πληρεί τις συνθήκες συνέχειας στο 0. Πράγματι έστω $\epsilon = 1/2$ (η επιλογή αυτής της τιμής έγινε για τον ίδιο λόγο με αυτόν της προηγούμενης συνάρτησης). Υπάρχει άραγε διάστημα γύρω από το 0, τέτοιο ώστε $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |\sin(1/x)| < 1/2$ για όλα τα x εντός του διαστήματος; Όχι βέβαια, αφού μπορώ να βρώ σημείο οσοδήποτε κοντά στο 0, x τέτοιο ώστε η $sin(1/x)$ να λαμβάνει την τιμή 1. Πρόκειται για το $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ με αρκούντως μεγάλη τιμή του n, έτσι ώστε να είναι $x_n < \delta$, όποιο και αν είναι το δ. Επομένως δεν μπορεί να βρεθεί κατάλληλη τιμή δ για $\epsilon = 1/2$, έτσι ώστε $|f(x) - f(0)| < 1/2$ για το διάστημα $|x - 0|x| < \delta$, και η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο 0. Προφανώς όποια τιμή και να είχε η συνάρτηση στο 0, θα ίσχυαν τα ίδια. Θα αρκούσε να λάβουμε ως ϵ το ήμισυ του $\max\{|1 - f(0)|, |-1 = f(0)|\}$ και πάλι θα βρισκόντουσαν κατάλληλα $\tilde{x}$ εντός του οποιουδήποτε διαστήματος $(-\delta, \delta)$, ώστε $f(\tilde{x}) = 1$ ή -1, έτσι ώστε $|f(\tilde{x}) - f(0)| > \epsilon$. Η ασυνέχεια της f στο 0 δεν οφείλεται στην τιμή $f(0)$, αλλά στην ίδια τη μορφή της f.

Αν και η f, τουλάχιστον για τα θετικά x (ή τα αρνητικά μόνο) x, μπορεί να παρασταθεί γραφικά για κάθε $x > 0$ χωρίς να χρειάζεται να σηκώσουμε καθόλου το μολύβι μας από το χαρτί, και επομένως ίσως να κατέληγε κανείς στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να είναι συνεχής, η δυνατότητα συνεχούς απεικόνισης δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη τη συνέχειά της στο 0. Στις ολοένα και πιο απότομες ταλαντώσεις της συνάρτησης καθώς κανείς πλησιάζει το 0 κρύβεται και η αδυναμία μας τελικά να περάσει χωρίς διακοπή η γραφική παράσταση από το 0. Θα πρέπει να καταναλώσει κανείς άπειρη ποσότητα μελανιού για να φτάσει στο 0. Μπορείτε να δείξετε (δοκιμάστε το) ότι το μήκος της καμπύλης καθώς πλησιάζουμε στο 0 αποκλίνει, οπότε δεν είναι δυνατό η γραφίδα μας να φτάσει στο 0 σέρνοντάς την πάνω στο γράφημα. Μήπως λοιπόν αν ζητούσαμε επιπλέον το συνολικό μήκος της καμπύλης μέχρι το 0 να ήταν πεπερασμένο αυτό και μόνο αυτό θα εξασφάλιζε την συνέχεια της συνάρτησης. Και πάλι όχι! Δοκιμάστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x - \frac{1}{n+1}, & \text{αν } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \\ \\ \frac{1}{n} - x, & \text{αν } \frac{2n+1}{n(n+1)} < x \leq \frac{1}{n} \\ \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \text{ ή } x > 1 \end{array} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Πρόκειται για ένα σύνολο από τρίγωνα που ολοένα και μικραίνουν και ως προς τη βάση και ως προς το ύψος. Αν και το μήκος της πριονωτής αυτής γραφικής παράστασης απειρίζεται[1] η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0. Συνεπώς το συνολικό μήκος της γραφικής παράστασης δεν σχετίζεται με τη συνέχεια. Το γεγονός αυτό καθιστά τον ορισμό της συνέχειας μοναδικό μεταξύ άλλων πιθανών πιο φυσικών ίσως προτάσεων και αναδεικνύει και τη σοφία του ορισμού αυτού.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να δείξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης σε οποιοδήποτε άλλο σημείο εκτός του 0 (στο οποίο δείξαμε ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής). Από τεχνικής άποψης η προφανής

[1] Το γεγονός αυτό βασίζεται στο ότι η αρμονική σειρά $\sum(1/n)$ δεν συγκλίνει.

συνέχεια της συνάρτησης σε οποιοδήποτε άλλο σημείο εκτός από το μηδέν, όπως θα δείτε είναι αρκετά δύσκολο να δειχθεί με βάση τον ορισμό. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta(\epsilon)$, έτσι ώστε να είναι $|\sin(1/x) - \sin(1/x_0)| < \epsilon$ για όλα τα $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$. Πρέπει με κάποιο τρόπο να συσχετίσουμε την πολύπλοκη έκφραση $\sin(1/x) - \sin(1/x_0)$ με την απόσταση $x - x_0$ και μάλιστα υπο μορφή ανισοτήτων, έτσι ώστε η ανισότητα

$$|x - x_0| < \delta(\epsilon)$$

να εξασφαλίζει ότι

$$|\sin(1/x) - \sin(1/x_0)| < \epsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sin(1/x) = \sin(1/x_0 + \sigma) = \sin(1/x_0)\cos(\sigma) + \cos(1/x_0)\sin(\sigma),$$

όπου με σ ορίσαμε τη διαφορά $(1/x) - (1/x_0) = (x_0 - x)/(x\, x_0)$. Έτσι

$$\begin{aligned} |\sin(1/x) - \sin(1/x_0)| &= \\ |\sin(1/x_0)(\cos(\sigma) - 1) + \cos(1/x_0)\sin(\sigma)| &= \\ |-\sin(1/x_0)\, 2\sin^2(\sigma/2) + \cos(1/x_0)\, 2\sin(\sigma/2)\cos(\sigma/2)| &= \\ 2|\sin(\sigma/2)|\, |\cos(1/x_0 + \sigma/2)| &= \\ 2|\sin(\sigma/2)| &< \\ 2|\sigma|.^2 & \end{aligned} \tag{1}$$

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε μια $\delta(\epsilon)$ έτσι ώστε η $|x - x_0| < \delta$ να εγγυάται την $2|\sigma| < \epsilon$. Η τελευταία γράφεται

$$|x - x_0| < \epsilon \frac{|x x_0|}{2}.$$

Προτού προχωρήσουμε καταλαβαίνουμε ότι θα μπορούσαμε να μειώσουμε το βάρος της απόδειξης αν κάνουμε την παρατήρηση, ότι η εν λόγω συνάρτηση είναι περιττή (λόγω ημιτόνου) και επομένως οποιαδήποτε κατασκευή της $\delta(\epsilon)$ για τα θετικά x_0, αυτή θα είναι εξίσου καλή και για τα αρνητικά x_0.

Δεύτερη παρατήρηση: Η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη, αιωρούμενη μεταξύ -1 και +1. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση $|f(x) - f(x_0)|$ είναι για κάθε x και x_0 μικρότερη του 2. Επομένως αν είναι $\epsilon > 2$, ότι και να θέσουμε για $\delta(\epsilon)$, αρκεί να είναι θετικό, είναι ικανό να εξασφαλίσει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Ας θέσουμε λοιπόν σε αυτή την περίπτωση $\delta(\epsilon) = 1$.

[2] Στη σειρά αυτή των ανισοτήτων και ισοτήτων χρησιμοποιήθηκαν οι ταυτότητες για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των διπλασίων τόξων και το γεγονός ότι το ημίτονο και το συνημίτονο είναι φραγμένο κατ' απόλυτη τιμή από το 1. Τέλος χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα $|\sin a| < |a|$.

Τρίτη παρατήρηση: Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι προφανές ότι η δ που αντιστοιχεί στο εκάστοτε ϵ (αν το ϵ είναι μικρό, δηλαδή μικρότερο ή ίσο με το 2) πρέπει να είναι τόσο πιο μικρή, όσο το σημείο στο οποίο διερευνούμε τη συνέχεια είναι πιο κοντά στο 0, γιατί εκεί το ανεβοκατέβασμα της συνάρτησης είναι πιο απότομο. Επομένως θα ξεχωρίσουμε 2 περιοχές για το x_0. (i) Αν το x_0 ξεπερνά την τιμή 1, τότε $|x\, x_0| > (x_0 - \delta)x_0$. Συνεπώς

$$\epsilon\frac{|xx_0|}{2} > \epsilon\frac{1-\delta}{2} \tag{2}$$

και αν θέλουμε η δ να παρεμβάλλεται μεταξύ του $|x-x_0|$ και του $\epsilon|xx_0|/2$, έτσι ώστε όταν $|x-x_0| < \delta$, να ισχύει κατ' ανάγκη η (1). Αν θέσουμε λοιπόν

$$\delta = \epsilon\frac{1-\delta}{2} \Rightarrow \delta < \epsilon\frac{|xx_0|}{2}$$

αλλά η πρώτη ισότητα δίνει $\delta = \epsilon/(2+\epsilon)$. (ii) Αν, τώρα, $x_0 \leq 1$

$$\epsilon\frac{|xx_0|}{2} > \epsilon\frac{x_0(x_0-\delta)}{2}. \tag{3}$$

Ακολουθώντας την ίδια συνταγή με προηγουμένως βρίσκουμε ότι αν θέσουμε $\delta = \epsilon x_0(x_0-\delta)/2$ και λύνοντας ως προς δ, δηλαδή

$$\delta = \frac{\epsilon x_0^2}{2+\epsilon x_0}$$

εξασφαλίζουμε ότι αν αυτό το δ είναι μεγαλύτερο του $|x-x_0|$ τότε είναι και

$$|x-x_0| < \delta = \frac{\epsilon x_0^2}{2+\epsilon x_0} = \frac{\epsilon x_0}{2}\frac{x_0}{1+\epsilon x_0/2}$$

και το τελευταίο αυτό κλάσμα είναι μικρότερο του μικρότερου επιτρεπτού x, δηλαδή του $x_0 - \delta$ (εύκολο να δειχθεί με αντικατάσταση του δ). Επομένως αν $|x-x_0| < \delta$ είναι και $|x-x_0| < \epsilon x_0 x/2$, που είναι το αρχικό ζητούμενο.

Αν δεν έχετε ζαλιστεί με όλο αυτό το πανηγύρι ανισοτήτων, ας βάλουμε σε σειρά όλα τα αποτελέσματα για την $\delta(\epsilon)$:

$$\delta(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \epsilon > 2 \\ \frac{\epsilon}{2+\epsilon}, & \text{αν } \epsilon \leq 2 \text{ και } |x_0| \geq 1 \\ \frac{\epsilon x_0^2}{2+\epsilon x_0}, & \text{αν } \epsilon \leq 2 \text{ και } |x_0| < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Οι ισότητες $\epsilon = 2$ και $x_0 = 1$ προστέθηκαν (χωρίς να αναλυθούν ξεχωριστά) στις παραπάνω περιπτώσεις αφού είναι εύκολο να δείξετε ότι συμπεριλαμβάνονται και αυτές στις προαναφερθείσες αναλύσεις.

Όλη η παραπάνω ανάλυση, δεν έχει καμία ιδιαίτερη διδακτική σημασία, πέραν του να δείξει απλώς έναν τρόπο προσέγγισης σε μια κατάλληλη συνάρτηση (την $\delta(\epsilon)$) έτσι ώστε οι ανισότητες του ορισμού της συνέχειας να επαληθεύονται.

Θα μπορούσε κανείς να αποφύγει όλη αυτή τη φασαρία βασιζόμενος στο θεώρημα που εξασφαλίζει τη συνέχεια στην περίπτωση σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων, εδώ της $\sin x$ και της $1/x$ στο διάστημα που αυτές είναι συνεχείς).

Ας εξετάσουμε τώρα μια άλλη συνάρτηση η οποία είναι τεχνηέντως κατασκευασμένη να έχει ασυνέχειες και μάλιστα με εξαιρετικά πυκνό τρόπο σε ένα δοσμένο σημείο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & \text{για } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Το σημείο αυτό είναι προφανώς το $x = 0$. Προτού μελετήσουμε εκτενέστερα τη συνάρτηση αυτή, ας αναζητήσουμε πρώτα τα απαγορευμένα x της συνάρτησης. Αν ο παραονομαστής του πρώτου κλάδου της συνάρτησης γίνει μηδέν, η συνάρτηση δεν ορίζεται, και αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν $0 \leq 1/x < 1$ δηλαδή όταν $x > 1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το $(-\infty, 1]$.

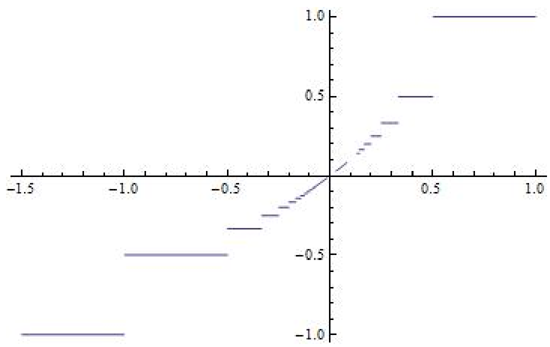
Εντός του πεδίου αυτού η συνάρτηση αλλάζει τιμή («πηδάει») στα σημεία $x = \pm 1/n$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και ίσως το 0 αφού στο σημείο αυτό η συνάρτηση ορίζεται ξεχωριστά. Έτσι διαπιστώνουμε ότι

Για $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, δηλαδή $n+1 > \frac{1}{x} \geq n$, δηλαδή $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, $\quad f(x) = \frac{1}{n}$.

Για $-\frac{1}{n+1} \geq x > -\frac{1}{n}$, δηλαδή $-(n+1) \leq \frac{1}{x} < -n$, δηλαδή $\left[\frac{1}{x}\right] = -(n+1)$, $\quad f(x) = -\frac{1}{n+1}$.

Παρότι η συνάρτηση αυτή εκτελεί άλματα στα σημεία $\pm 1/n$ είναι εμφανές ότι οι τιμές της μικραίνουν κοντά στο $x = 0$ (βλ. σχήμα) και μάλιστα έχουν μέγεθος όσο και η τιμή του x στις θέσεις της ασυνέχειας (ή και ακόμη μικρότερο κατ΄απόλυτη τιμή, στα αρνητικά x). Αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό καθιστά τελικά τη συνάρτηση συνεχή στο $x = 0$.

Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο 0 με βάση τον ορισμό· δηλαδή θα δείξουμε (και θα κατασκευάσουμε) κατάλληλη συνάρτηση $\delta(\epsilon)$, έτσι ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να είναι $|f(x) - f(0)| = |f(x)|, \epsilon$ για όλα τα $|x - 0| = |x| < \delta(\epsilon)$. Γνωρίζουμε ότι αν $0 < x \leq 1/n$, $0 < f(x) \leq 1/n$ (αφού αν $1/(n+k+1) < x \leq 1/(n+k) \leq 1/n$, $f(x) = 1/(n+k) \leq 1/n$ με $k \in 0, 1, 2, \ldots$) με την ισότητα του ενός να συνεπάγεται την ισότητα του άλλου. Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες ακόμη και αν γραφούν ως



Σχήμα 2: Το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα $[-1.5, 1]$.

καθαρές ανισότητες. Έτσι μπορούμε να έχουμε

$$0 < x < 1/n \Leftrightarrow 0 < f(x) < 1/n.$$

Μοναδικό θετικό σημείο του πεδίου ορισμού της f που έμεινε ακάλυπτο από τις παραπάνω ανισότητες είναι το $x = 1$ για το οποίο είναι $f(1) = 1$.[3]

Αντίστοιχα για τα αρνητικά x θα έχουμε: αν $-1/n < x < 0$, $0 > f(x) \geq -1/(n+1) > -1/n$ (και για $x \leq -1$ $f(x) = -1$). Οπότε συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες έχουμε για

$$|x| < 1/n \Leftrightarrow |f(x)| < 1/n \text{ και για } |x| \geq 1 \Leftrightarrow |f(x)| = 1.$$

στην τελευταία ανισοϊσότητα το $>$ αναφέρεται μόνο στα αρνητικά x αφού τα θετικά $x > 1$ δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η διπλή συνεπαγωγή

$$|x| < 1/n \Leftrightarrow |f(x)| < 1/n,$$

δεν συνεπάγεται και

$$|x| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x)| < \epsilon,$$

αφού δεν μπορούμε να γράψουμε το κάθε ϵ (έστω και αν αυτό είναι μικρότερο του 1) ως $1/n$. Αν μπορούσαμε θα θέταμε απλώς $\delta(\epsilon) = \epsilon$ και θα είχαμε ολοκληρώσει (τουλάχιστον για τα $\epsilon < 1$) τη διερεύνησή μας όσον αφορά στη συνέχεια στο 0. Όμως για κάθε $\epsilon < 1$ παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε κατάλληλο φυσικό αριθμό n έτσι ώστε $\epsilon/2 < 1/n < \epsilon$.[4] Συνεπώς θα ήταν λογικό να διαλέξουμε για $\epsilon < 1$, $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$, αφού για όλα τα $|x| < \epsilon/2 < 1/n < \epsilon$ θα είναι και $f(x) < 1/n < \epsilon$. Θα πρέπει να διευκρινήσουμε ότι η παρεμβολή με $\epsilon/2$ ανάμεσα στο $|x|$ και στο $1/n$ είναι αναγκαία γιατί αν το $|x| < \epsilon$ δεν συνεπάγεται και ότι $|x| < 1/n$ για το κατάλληλο n). Με το $\epsilon/2$ βεβαιωθήκαμε ότι $|x| < 1/n$ ώστε να καταλήξουμε και ότι $|f(x)| < 1/n$.

Μένει να εξεταστεί και η περίπτωση $\epsilon \geq 1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη από πάνω από το 1 και από κάτω από το -1. Επομένως ως $\delta(\epsilon)$ για $\epsilon \geq 1$ μπορούμε να θέσουμε οτιδήποτε μικρότερο του 1/2 αφού στο διάστημα $(-1/2, 1/2)$ η f παίρνει τιμές μικρότερες του 1/2 το οποίο είναι μικρότερο του παραπάνω ϵ. Έτσι συνολικά θα μπορούσαμε να ορίσουμε την εξής συνάρτηση $\delta(\epsilon)$ που θα ικανοποιούσε τις απαιτήσεις της συνέχειας της συνάρτησης στο 0:

$$\delta(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon/2, & \text{για } 1 > \epsilon > 0, \\ \\ 1/3, & \text{για } \epsilon \geq 1. \end{cases}$$

αυτή δεν είναι συνεχής, αλλά δεν μας ζήτησε και κανένας να είναι· απλώς να υπάρχει.

Αν και συνεχής η συνάρτηση (5) στο 0, δεν υπάρχει κανένα διάστημα γύρω από το 0 στο οποίο η συνάρτηση αυτή να είναι παντού συνεχής. Πάντα θα υπάρχει κάποιο σημείο $x = 1/n$, εντός οποιοδήποτε διαστήματος γύρω από το 0, όπου η συνάρτηση θα εμφανίζει ασυνέχεια.

[3] Οι υπόλοιπες περιπτώσεις, π.χ. $x = 1/3$, καλύπτονται αφού $1/3 < 1/2$.

[4] Πράγματι για $\epsilon < 1$, $1/\epsilon > 1$ και $2/\epsilon > 2$ και αυτοί οι δύο αριθμοί $2/\epsilon$ και $1/\epsilon$ απέχουν περισσότερο από 1, επομένως υπάρχει φυσικός αριθμός ανάμεσά τους.