



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση I

29 Μαρτίου 2014

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1 (Σειρές)

(α) Για ποιές τιμές του α η σειρά

$$\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha^2(1 - \alpha) + \alpha^3(1 - \alpha) + \dots$$

συγκλίνει; Προσδιορίστε το άθροισμα στις περιπτώσεις αυτές.

(β) Προσδιορίστε το άθροισμα της σειράς:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

(γ) Προσδιορίστε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^N \sin n$ και μέσω αυτού ελέγξτε αν η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει [Υπ. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Euler $e^{in} = \cos n + i \sin n$].

(δ) Προσδιορίστε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2014n + 2013^n}{2014^n + 2013}$$

(ε) Για ποιές τιμές του α συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}$$

(στ) Ελέγξτε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή σύγκλινουν μόνο απολύτως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + \sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^{2014} + 2014}$$

Άσκηση 2 (Συνέχεια συναρτήσεων)

- (α) Χρησιμοποιήστε τον $\epsilon - \delta$ ορισμό για να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow 0} (x + |x|)/x$ δεν υπάρχει.
- (β) Αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε να είναι $|f(x)| < \epsilon$ όταν $|x| < \delta$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την $f(0)$;
- (γ) Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης που ικανοποιεί την ιδιότητα της μέσης τιμής αλλά δεν είναι συνεχής.
- (δ) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = \xi$ και η $f(x)$ μηδενίζεται για τιμές του x οσοδήποτε κοντά στο ξ , ή (ισοδυνάμως) η $f(x)$ λαμβάνει και θετικές και αρνητικές τιμές για τιμές του x οσοδήποτε κοντά στο ξ , τότε είναι αναγκαστικά $f(\xi) = 0$. Δώστε ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης.
- (ε) Αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δ τέτοιο ώστε $|f(x)| < \epsilon$ όταν $0 < |x| < \delta$, μπορείτε να συνάγετε την τιμή της $f(0)$;
- (στ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x} = \beta,$$

μπορείτε να συνάγετε την τιμή της $f(0)$;

Άσκηση 3 (Συνέχεια συναρτήσεων)

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

- (α) Αν $f(x) = 0$ για ρητές τιμές του x δείξτε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα x . Συνεπώς αν δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g λαμβάνουν τις ίδιες τιμές για τις ρητές τιμές του x , τότε θα είναι $f(x) = g(x)$ για όλες τις τιμές του x .
- (β) Αν $f(x) \geq 0$ για όλες τις ρητές τιμές του x , δείξτε ότι $f(x) \geq 0$ για όλα τα x .
- (γ) Αν $f(x) > 0$ για ρητές τιμές του x δεν είναι αναγκαστικά $f(x) > 0$ για όλα τα x . Κατασκευάστε ένα παράδειγμα συνάρτησης που να φαίνεται καθαρά αυτό.
- (δ) Δείξτε ότι αν $f(x + y) = f(x) + f(y)$ τότε $f(x) = \lambda x$ (Υπ. δείξτε ότι η πρόταση είναι αληθής για x ρητό, και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την πρόταση (α).)