



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση I

12 Νοεμβρίου 2012

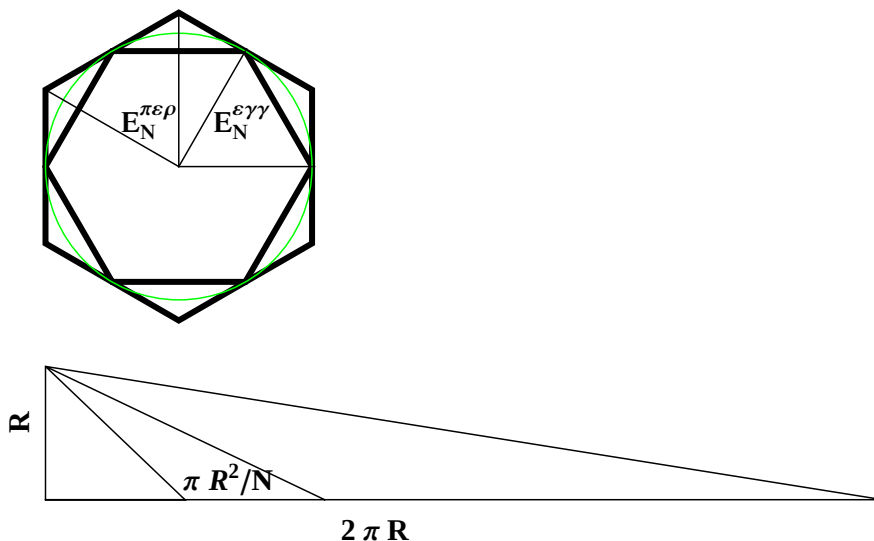
Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Μια αριστουργηματική απόδειξη του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης όχι μόνο καταλάβαινε διαισθητικά την έννοια του ορίου, αλλά, απ' ότι φαίνεται από την απόδειξή του που θα παρουσιάσουμε ακολούθως, είχε στο μυαλό του αυτήν ακριβώς την έννοια του ορίου –συγκεκριμένα μιας ακολουθίας– που δίνει ο σύγχρονος ορισμός του ορίου ακολουθίας.

Απολαύστε λοιπόν την απόδειξη του καθόλου αυτονόητου αποτελέσματος ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας R είναι πR^2 . Δοκιμάστε να υπολογίσετε το εμβαδόν αυτό μόνοι σας χωρίς να καταφύγετε σε ολοκληρώματα, και χωρίς το οπλοστάσιο του πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων (καθ' ότι και με ολοκληρώματα να το δοκιμάζατε θα ήταν μάλλον δύσκολο να το καταφέρετε χωρίς να θυμόσαστε ένα αρκετά ευρύ τυπολόγιο ολοκληρωμάτων). Αν δεν το προσπαθήσετε μόνοι σας δεν θα εκτιμήσετε αρκετά τη μεγαλειώδη σκέψη του Αρχιμήδη.

Λοιπόν ας κατασκευάσουμε έναν κύκλο ακτίνας R και δίπλα σε αυτόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές R και $2\pi R$. (Ο Αρχιμήδης ήδη γνώριζε ότι ο αριθμός π είναι ένας μαγικός αριθμός που συνδέει την περίμετρο με τη διάμετρο ενός κύκλου και είχε βρει τρόπο κατασκευής αναδρομικής ακολουθίας για τον υπολογισμό του π μέσω του υπολογισμού της περιμέτρου πολυγώνων εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων του κύκλου καθώς το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου τείνει στο άπειρο. Δεν είναι όμως διόλου προφανές, αν το καλοσκεφθείτε, αν αυτός ο μαγικός αριθμός θα εμφανιστεί και στο εμβαδόν του κύκλου.) Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης προχωράει για να δείξει ότι τα δύο αυτά δύσκολα συγκρίσιμα σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν. Η απόδειξη δίνεται μέσω της επαγωγής σε άτοπο.



Έστω ότι ο κύκλος K έχει μικρότερο εμβαδόν από το τρίγωνο T ($K < T$). Ας χωρίσουμε την πλευρά του τριγώνου με μήκος $2\pi R$ σε N ίσα τμήματα. Το τρίγωνο θα χωριστεί έτσι σε N ισεμβαδικά τρίγωνα το καθένα με εμβαδόν $\frac{1}{2}(2\pi R/N)R = \pi R^2/N$. Ας κατασκευάσουμε τώρα και ένα εγγεγραμμένο κανονικό N -γωνο στον κύκλο. Αν φέρουμε και τις αντίστοιχες ακτίνες από τις κορυφές του πολυγώνου θα σχηματιστούν N ισεμβαδικά τρίγωνα το καθένα με εμβαδόν (πλευρά πολυγώνου) $\times$ (ύψος)/2. Κάθε τέτοιο τρίγωνο θα είναι μικρότερο σε εμβαδόν από κάθε μικρό τρίγωνο στο οποίο χωρίσαμε το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο αφού η περίμετρος του πολυγώνου είναι μικρότερη από την περίμετρο του κύκλου (εδώ υποκρύπτεται η γνωστή μας τριγωνική ανισότητα), ενώ το ύψος των τριγώνων του πολυγώνου είναι μικρότερα της ακτίνας του κύκλου. Στο όριο όμως που $N \rightarrow \infty$, η μεν περίμετρος του πολυγώνου πηγαίνει οριακά στην περίμετρο του κύκλου ενώ το ύψος των τριγώνων του πολυγώνου πηγαίνει στην ακτίνα του κύκλου (καθώς τα τρίγωνα γίνονται λεπτότερα και λεπτότερα). Επομένως το εμβαδόν του κάθε τριγώνου του πολυγώνου τείνει στο εμβαδόν καθενός από τα μικρά τρίγωνα που διαχωρίστηκε το ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα αρκούντως μεγάλο N έτσι ώστε το εμβαδόν του πολυγώνου να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά το εμβαδόν του τριγώνου. Επομένως θα έχουμε

$$E_N^{\varepsilon\gamma\gamma} < K < T$$

και ταυτόχρονα $|E_N^{\varepsilon\gamma\gamma} - T|$ οσοδήποτε μικρό (για κατάλληλο N). Οι δύο τελευταίες εκφράσεις όμως είναι ασύμβατες. Σκεφθείτε γιατί (εδώ κρύβεται η βαθιά κατανόηση της έννοιας του ορίου και του supremum από τον Αρχιμήδη). Επομένως δεν είναι δυνατόν $K < T$.

Έστω τώρα $K > T$. Προχωράμε ακριβώς με την ίδια λογική κατασκευάζοντας όμως τώρα το περιγεγραμμένο πολύγωνο του οποίου η περίμετρος προσεγγίζει από πάνω την περίμετρο του κύκλου καθώς $N \rightarrow \infty$. Συκρίνοντας με τα τριγωνάκια στα οποία χωρίστηκε το ορθογώνιο τρίγωνο, το πολύγωνο έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό του κύκλου και προσεγγίζει το εμβαδόν του τριγώνου, επομένως τώρα

$$E_N^{\pi\epsilon\rho} > K > T$$

και $|E_N^{\pi\epsilon\rho} - T|$ οσοδήποτε μικρό (για κατάλληλο N). Πάλι ασύμβατες σχέσεις.

Τι απομένει λοιπόν; Μα φυσικά $K = T = \pi R^2$!