

Σημειώσεις Ανάλυσης I

1. Οι ρητοί αριθμοί

- Θεωρούμε γνωστούς τους φυσικούς αριθμούς

$$1, 2, 3, \dots$$

και τις πράξεις (πρόσθεση - πολλαπλασιασμό) μεταξύ αυτών. Οι φυσικοί αριθμοί είναι επίσης διατεταγμένοι με κάποια σειρά και οι σχέσεις διάταξης σημειώνεται με τα συμβόλα ανισότητας $>$ και $<$.

- Μέσω της πρόσθεσης (στην προσπάθεια να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $\beta + x = \alpha$) οι φυσικοί αριθμοί γενικεύονται στους ακέραιους

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots,$$

και έπειτα μέσω του πολλαπλασιασμού (στην προσπάθεια να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $\beta \cdot x = \alpha$) στους ρητούς που γράφονται ως α/β , όπου α και β ακέραιοι (με $\beta \neq 0$). Η διάταξη στους ρητούς ορίζεται ως εξής: Είναι

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$$

αν

$$\alpha\delta > \beta\gamma$$

(στην περίπτωση που ο ρητός είναι θετικός θεωρούμε ότι και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι θετικοί, ενώ αν είναι αρνητικός θεωρούμε ότι μόνο ο αριθμητής –και όχι ο παρονομαστής– είναι αρνητικός).

- Οι ρητοί έχουν μία ιδιαίτερη και μη προφανή ιδιότητα που τους ξεχωρίζει από τους ακέραιους και τους φυσικούς: μεταξύ δύο οποιονδήποτε ρητών υπάρχει και άλλος ρητός και επομένως υπάρχουν άπειροι ρητοί. Πράγματι, αν

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$$

για κάθε φυσικό ν , ο ρητός

$$\frac{\alpha + \nu\gamma}{\beta + \nu\delta}$$

βρίσκεται μεταξύ των α/β και γ/δ . (Ένας άλλος τρόπος να το δει αυτός είναι να καταστήσει τα δύο κλάσματα ομώνυμα και επιπλέον να πολλαπλασιάσει αριθμητές και παρονομαστές επί 2.)

- Οι ρητοί, παρότι πυκνά διατεταγμένοι, **δεν** εξαντλούν όμως όλους του αριθμούς. Μάλιστα μεταξύ των ρητών αριθμών υπάρχει τεράστιος αριθμός κενών και πιο συγκεκριμένα μη αριθμήσιμο πλήθος κενών. Αυτό έγινε αντιληπτό, μάλλον πρώτα από τους Έλληνες, όταν κατάλαβαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρές μοναδιαίου μήκους δεν μπορεί να είναι ρητός αριθμός. Αυτός ο αριθμός, καθώς και όλοι εκείνοι οι αριθμοί που συμπληρώνουν τα κενά μεταξύ των ρητών, ονομάστηκαν άρρητοι διότι δεν μπορεί να ειπωθούν (θα δούμε το λόγο). Αυτή η παρατήρηση αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές ανακάλυψεις στα μαθηματικά και τη βάση για τη δόμηση της φυσικής που βασίζεται σε συνεχείς συναρτήσεις¹. Οι επιπτώσεις αυτής της πλήρωσης των ρητών αποτελεί κεντρικό θέμα της Ανάλυσης I.

Η απόδειξη που ακολουθεί για το άρρητο του $\sqrt{2}$ αποδίδεται στους Πυθαγόρειους και αναφέρεται από τον Αριστοτέλη, ως χαρακτηριστικό παράδειγμα αποδείξεων δια της “προς άτοπον απαγωγής”.

Θεώρημα: Δεν υπάρχει ρητός αριθμός με τετράγωνο ίσο με 2.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο α/β είναι ρητός αριθμός με την ιδιότητα $\alpha^2/\beta^2 = 2$. Οι ακέραιοι α, β μπορούν πάντα να απλοποιηθούν και να καταστούν, αν αρχικά δεν ήταν, μεταξύ τους πρώτοι, δηλαδή να μην έχουν άλλο κοινό διαιρέτη εκτός από το 1. Συνεπώς υποθέτουμε ότι υπάρχει ρητός α/β τέτοιος ώστε $\alpha^2/\beta^2 = 2$ και οι α και β δεν έχουν κοινό διαιρέτη διάφορο της μονάδας. Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha^2 = 2\beta^2,$$

συνεπώς ο α , επειδή έχει άρτιο τετράγωνο, πρέπει να είναι και αυτός άρτιος, δηλαδή είναι $\alpha = 2m$ με m κάποιον ακέραιο. Συνεπώς:

$$\beta^2 = 2m^2$$

και ο β είναι και αυτός άρτιος, δηλαδή $\beta = 2n$. Άρα οι α και β έχουν κοινό διαιρέτη τον 2 αντίθετα με την αρχική υπόθεση, όπερ άτοπον και επομένως η υπόθεση μας δεν είναι δυνατόν να ισχύει, ό.έ.δ.

¹ Ο Ιππάσιος από το Μεταπόντιον της κάτω Ιταλίας τον 5ο π.Χ. αιώνα αναφέρεται ως ο πρώτος που απέδειξε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Ο Ιππάσιος ήταν Πυθαγόρειος και αναφέρεται ότι επειδή αυτή η απόδειξη ερχόταν σε αντίθεση με την Πυθαγόρεια διδασκαλία, θανατώθηκε από τους Πυθαγόρειους οι οποίοι τον έπνιξαν στη θάλασσα. Ο Πλάτων αναφέρει στον Θεαίτητο ότι άκουσε για τους άρρητους αριθμούς από τον δάσκαλό του τον Θεόδωρο της Κυρήνειας. Ο Ευκλείδης δίνει στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων μια ενδιαφέρουσα κατασκευαστική απόδειξη του θεωρήματος αυτού και αναφέρει ότι η απόδειξη αυτή “είναι σίγουρα αρχαία”.

2. Πλήρωση των κενών των ρητών με τομές Dedekind. Κατασκευή των πραγματικών αριθμών.

Ας θεωρήσουμε τον ρητό

$$7 \frac{8}{33} \equiv 7 + 8/33 = 7.242424242424\dots$$

(δείξτε ότι η περιοδικότητα αυτού του αριθμού συνεπάγεται τη ρητότητα του αριθμού). Χωρίζουμε τους ρητούς σε δύο τάξεις. Στη τάξη X ανήκουν όλοι οι ρητοί που είναι μικρότεροι ή ίσοι του $7 \frac{8}{33}$. Στη τάξη Ψ ανήκουν όλοι οι ρητοί που είναι μεγαλύτεροι του $7 \frac{8}{33}$. Ρητοί αριθμοί που ανήκουν στη τάξη X είναι:

$$7.2, 7.1, \dots, 7.24, 7.23, \dots, 7.242, 7.241, \dots, 7.2424, 7.2423, \dots$$

Ρητοί αριθμοί που ανήκουν στη τάξη Ψ είναι:

$$7.3, 7.4, \dots, 7.25, 7.26, \dots, 7.243, 7.244, \dots, 7.2425, 7.2426, \dots$$

Με τον τρόπο αυτό χωρίσαμε όλους τους ρητούς σε δύο τάξεις. Στην τάξη (X) είναι όλοι οι ρητοί που είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον $7 \frac{8}{33}$, στην τάξη (Ψ) είναι όλοι οι ρητοί που είναι μεγαλύτεροι από τον $7 \frac{8}{33}$. Κάθε δε ρητός που είναι στη τάξη (X) είναι μικρότερος όλων των ρητών της τάξης (Ψ). Θα λέμε ότι αυτός ο χωρισμός **όλων** των ρητών σε δύο τάξεις που είναι διατεταγμένες έτσι ώστε όλοι οι ρητοί της πρώτης τάξης να είναι μικρότεροι από όλους τους ρητούς της δεύτερης τάξης αποτελεί μία τομή του Dedekind (1872). Τώρα, σε κάθε τομή Dedekind το σύμβολο (X, Ψ) αντιστοιχεί σε ένα από τα ακόλουθα:

- τον μεγαλύτερο αριθμό της τάξης (X), ο οποίος και ανήκει στην τάξη (X), οπότε ο (X, Ψ) είναι ρητός.
- τον μικρότερο αριθμό της τάξης (Ψ), ο οποίος και ανήκει στην τάξη (Ψ), οπότε ο (X, Ψ) είναι και πάλι ρητός.²
- στο νέο αριθμό (X, Ψ) που είναι μεγαλύτερος όλων των ρητών της (X) και μικρότερος όλων της (Ψ), όταν δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός στην τάξη (X) ούτε μικρότερος στην τάξη (Ψ). Αυτός ο νέος αριθμός λέγεται άρρητος.

²Είναι φανερό ότι δεν μπορεί να υπάρχει αριθμός τ που να είναι μεγαλύτερος όλων της (X) και να ανήκει στην (X) και άλλος αριθμός λ που να είναι μικρότερος όλων της (Ψ) και να ανήκει στην (Ψ), διότι τότε ο ρητός $(\tau + \lambda)/2$ που βρίσκεται μεταξύ τους δεν είναι ούτε στη τάξη (X), ούτε στην (Ψ), οπότε θα υπήρχε ρητός εκτός των δύο τάξεων, που δεν είναι δυνατόν διότι εξ' υποθέσεως οι (X) και (Ψ) εξαντλούν όλους τους ρητούς.

Στην περίπτωση της τομής (X, Ψ) του παραδείγματος, η τομή είναι ο ρητός $78/33$ που είναι ο μεγαλύτερος της τάξης (X) . Όλοι οι ρητοί μπορούν να ορισθούν με αυτό τον τρόπο. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όμως η τρίτη περίπτωση όταν δεν υπάρχει μεγαλύτερος ρητός στην (X) ούτε μικρότερος στην (Ψ) .

Θεωρήστε την τάξη (X) που αποτελείται από όλους τους ρητούς x για τους οποίους είναι $x^2 < 2$ και την τάξη (Ψ) που αποτελείται από όλους τους ρητούς x για τους οποίους είναι $x^2 > 2$. Αυτές οι δύο τάξεις εξαντλούν τους ρητούς διότι έχουμε δείξει ότι δεν υπάρχει ρητός που να έχει τετράγωνο 2. Κάθε ρητός της (X) είναι μικρότερος από κάθε ρητό της (Ψ) . Επίσης δεν υπάρχει ρητός που να είναι ο μεγαλύτερος της (X) και ομοίως δεν υπάρχει ρητός που να είναι μικρότερος της (Ψ) .³ Η τομή (X, Ψ) ορίζει τον άρρητο $\sqrt{2}$.

Όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν με τομές Dedekind, οι ρητοί (που ανήκουν στη Χαμηλή ή στην Ψηλή τάξη) και οι άρρητοι (που δεν ανήκουν στη Χαμηλή ή στην Ψηλή τάξη), λέγονται πραγματικοί αριθμοί. Οι πραγματικοί αριθμοί κληρονομούν τις πράξεις που έχουμε ορίσει στους ρητούς καθώς και τη διάταξη. Έχουν όμως πληρότητα και τα “κενά” που εντοπίσαμε στους ρητούς εξαλείφονται πλήρως. Π.χ. μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντα άρρητος αριθμός, και μεταξύ δύο αρρήτων υπάρχει πάντα ρητός (απόδειξη αργότερα). Αυτό αποτυπώνεται στο βασικό αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Με το αξίωμα βεβαιώνεται ότι όλες οι τομές ρητών αριθμών ορίζουν πραγματικούς αριθμούς.

Αξίωμα Dedekind

Αν με οποιονδήποτε τρόπο **όλοι** οι πραγματικοί αριθμοί χωρισθούν σε δύο τάξεις (X) και (Ψ) έτσι ώστε κάθε αριθμός στην (X) να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της τάξης (Ψ) , τότε υπάρχει **ένας και μοναδικός** πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε κάθε αριθμός μικρότερος του ξ να ανήκει στην τάξη (X) και κάθε μεγαλύτερος να ανήκει στη τάξη (Ψ) . Ο αριθμός ξ θα ανήκει στη τάξη (X) ή στη τάξη (Ψ) . Αν ανήκει στη τάξη (X) θα είναι ο μεγαλύτερος αριθμός αυτής της τάξης, ενώ αν ανήκει στην (Ψ) θα είναι ο μικρότερος της (Ψ) .

3. Άνω και κάτω φράγμα συνόλων πραγματικών αριθμών. Θεώρημα της πληρότητας. Ανώτερο και κατώτερο πέρας.

Θεωρήστε τους εξής αριθμούς:

A. Όλοι οι πρώτοι αριθμοί.

B. Οι ρητοί x που ικανοποιούν $1 \leq x \leq 2$.

³ Διότι αν α/β είναι ο μεγαλύτερος ρητός της τάξης (X) ο $(2\alpha + 2\beta)/(\alpha + 2\beta) > \alpha/\beta$ (δείξτε το) και το τετράγωνο του είναι μικρότερο του 2 (δείξτε το) και συνεπώς ανήκει στην τάξη (X) , όπερ άτοπον. Η αντίστοιχη κατασκευή $(2\alpha + 2\beta)/(\alpha + 2\beta)$ ισχύει και για τη τάξη (Ψ) .

Γ. Οι πραγματικοί x που ικανοποιούν τη σχέση $1 \leq x \leq 2$.

Δ. Οι πραγματικοί x που ικανοποιούν τη σχέση $1 < x < 2$.

Όλα αυτά τα σύνολα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων.⁴

Στην περίπτωση (Α) δεν υπάρχει αριθμός M που είναι μεγαλύτερος όλων των στοιχείων του συνόλου. Στις περιπτώσεις (Β), (Γ), (Δ) υπάρχουν αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι όλων των στοιχείων των συνόλων, π.χ. ο 2 και οποιοσδήποτε μεγαλύτερός του, και αριθμοί που είναι μικρότεροι όλων των στοιχείων των συνόλων, π.χ. ο 1 και όλοι οι μικρότεροί του.

Αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $x \leq M$ για κάθε x του συνόλου, ο M ονομάζεται ανώτερο φράγμα του συνόλου και το σύνολο καλείται φραγμένο άνωθεν (ομοίως για το κατώτερο φράγμα). Αν το σύνολο είναι φραγμένο και άνωθεν και κάτωθεν ονομάζεται φραγμένο. Τα σύνολα (Β),(Γ),(Δ) είναι φραγμένα.

Άλλα παραδείγματα: Για το σύνολο αριθμών της ακολουθίας

$$(\alpha) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

ανώτερα φράγματα είναι η μονάδα και κάθε αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Για το σύνολο των αριθμών της ακολουθίας

$$(\beta) = 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

κατώτερα φράγματα είναι η μονάδα και κάθε αριθμός μικρότερος της μονάδας. (Ελέγξτε αν υπάρχουν ανώτερα φράγματα.)

Τα ανώτερα φράγματα του (α) σχηματίζουν το σύνολο των ανωτέρων φραγμάτων. Το σύνολο αυτό έχει ελάχιστο τον αριθμό 1. Ο ελάχιστος αριθμός των ανωτέρων φραγμάτων λέγεται *ανώτερο πέρασ* ή *supremum*. Τα κατώτερα φράγματα της (β) σχηματίζουν το σύνολο των κατώτερων φραγμάτων. Το σύνολο αυτό έχει μέγιστο τον αριθμό 1. Ο μέγιστος αριθμός των κατώτερων φραγμάτων λέγεται *κατώτερο πέρασ* ή *infimum*.

⁴Η απόδειξη ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι, απόδειξη που οφείλουμε στον Ευκλείδη, θεωρείται από τις σημαντικότερες αποδείξεις (εντελώς διαφορετικού τύπου απόδειξη από αυτήν που συναντήσαμε παραπάνω) και την παραθέτουμε όπως μας την παρέδωσε ο Ευκλείδης:

Έστω $2, 3, 5, \dots, \nu$ όλοι οι πρώτοι αριθμοί. Ο αριθμός

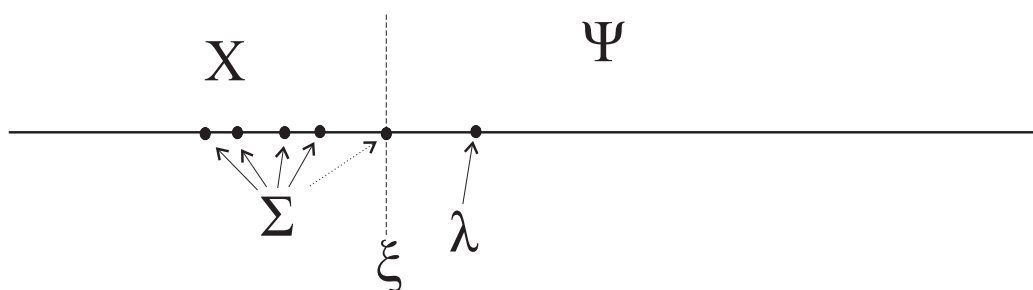
$$\mu = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots \nu + 1$$

εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι δεν διαιρείται από κανέναν απο τους $2, 3, 5, \dots, \nu$. Συνεπώς ο μ είναι και αυτός πρώτος ή διαιρείται από κάποιο πρώτο που είναι μεταξύ ν και μ . Σε κάθε περίπτωση υπάρχει πρώτος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τον ν , και συνεπώς η πρόταση ότι υπάρχει μεγαλύτερος πρώτος δεν αληθεύει. Συνεπώς οι πρώτοι αριθμοί δεν έχουν πεπερασμένο πλήθος.

Θα αποδείξουμε ότι σύνολα πραγματικών που είναι άνωθεν φραγμένα έχουν ανώτερο πέρασ και σύνολα κάτωθεν φραγμένα έχουν κατώτερο πέρασ. Η υπάρξη supremum ή sup και infimum ή inf σε αυτές τις περιπτώσεις είναι το περιεχόμενο του επομένου θεωρήματος.

Έστω Σ κάποιο άνωθεν φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Θα συμβολίζουμε με Σ' το σύνολο των ανώτερων φραγμάτων του.

Θεώρημα της πληρότητας: Ένα άνωθεν φραγμένο σύνολο Σ έχει ανώτερο πέρασ δηλαδή στο σύνολο των ανώτερων φραγμάτων Σ' υπάρχει πάντα ελάχιστος αριθμός ξ , δηλ. υπάρχει κάποιος αριθμός ξ που (i) ανήκει στο Σ' και (ii) δεν υπάρχει αριθμός του Σ' που να είναι μικρότερος του ξ (το (i) εξασφαλίζει ότι είναι άνω φράγμα και το (ii) ότι είναι το μικρότερο από αυτά).



Σχήμα 1: Η θέση των διαφόρων τάξεων, στοιχείων κλπ που αναφέρονται στην απόδειξη. Προσοχή ο αριθμός ξ μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο Σ . Ανήκει όμως στην τάξη Ψ .

Απόδειξη: Χωρίζουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς σε δύο τάξεις. Η τάξη Ψ περιλαμβάνει όλα τα άνω φράγματα του συνόλου Σ (η τάξη Ψ είναι το σύνολο Σ'). Στην τάξη X ανήκουν όλοι οι υπόλοιποι πραγματικοί αριθμοί.

Ο αριθμός x κατατάσσεται στη τάξη Ψ αν είναι μεγαλύτερος ή ίσος από όλα τα στοιχεία του Σ , δηλαδή $x \geq \sigma$ για κάθε στοιχείο σ που ανήκει στο Σ . Ο αριθμός x κατατάσσεται στη τάξη X αν υπάρχει στοιχείο σ του Σ που είναι μεγαλύτερο του x , δηλαδή $\sigma > x$ για κάποιο στοιχείο του Σ .

Τα σύνολα X και Ψ δεν είναι κενά. Το Ψ δεν είναι κενό διότι εξ'υποθέσεως είναι φραγμένο άνωθεν, οπότε κάθε ανώτερο φράγμα του ανήκει στο Ψ . Το X δεν είναι κενό διότι αν το σ είναι κάποιο στοιχείο του Σ τότε το $x = \sigma - 1$ θα ανήκει στο X .

Κάθε στοιχείο x του X είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο y του Ψ . Διότι υπάρχει στοιχείο του Σ που είναι $\sigma > x$ και το y είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε σ . Ο διαχωρισμός αυτός σε δύο τάξεις είναι ακριβώς η περίπτωση του αξιώματος Dedekind αφού όλα τα στοιχεία της Ψ είναι μεγαλύτερα από όλα τα στοιχεία της X και οι δύο τάξεις περιλαμβάνουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Από το αξίωμα του Dedekind οι δύο αυτές τάξεις ορίζουν έναν αριθμό (αυτόν ανάμεσά τους) ξ , τέτοιος ώστε για κάθε θετικό ϵ ο $\xi - \epsilon$ ανήκει στο X και ο $\xi + \epsilon$ στο Ψ . Το αξίωμα του Dedekind ο αριθμός ξ μπορεί να ανήκει ή στο Ψ ή στο X . Θα δείξουμε ότι ο ξ ανήκει στην Ψ (και όχι στην X).

Αν ο ξ ανήκε στο X θα υπήρχε κάποιο σ του Σ που θα ήταν $\sigma > \xi$. Αν ορίσουμε το ενδιάμεσό τους αριθμό $\eta = (\sigma + \xi)/2$ τότε θα ισχύει η ανισότητα $\sigma > \eta > \xi$. Από την ανισότητα προκύπτει ότι το η ανήκει στο Ψ επειδή είναι $\eta > \xi$ οπότε από τον ορισμό του Ψ θα πρέπει να είναι $\sigma \leq \eta$, που οδηγεί σε άτοπο διότι εκ κατασκευής ισχύει η ανισότητα $\sigma > \eta$.

Αποδείξαμε ότι ο ξ έχει τις εξής ιδιότητες: α) $\sigma \leq \xi$ για κάθε στοιχείο σ του Σ και (β) και για κάθε $\xi - \epsilon$ μικρότερο του ξ υπάρχει σ που είναι $\sigma > \xi - \epsilon$.

Η ιδιότητα (α) δείχνει ότι το ξ είναι άνω φράγμα του Σ και η ιδιότητα (β) δείχνει ότι είναι το μικρότερο άνω φράγμα.

4. Η κατανομή των ακεραίων και των ρητών αριθμών

Με τις τομές Dedekind κατασκευάσαμε το σώμα των πραγματικών αριθμών που έχει εφοδιασθεί εκτός από τις πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου και των σχέσεων διάταξης με την επιπρόσθετη κρίσιμη ιδιότητα της πληρότητας. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να αναπτύξουμε μαθηματική θεωρία που μπορεί να περιγράψει το φυσικό κόσμο.

Θα δώσουμε μερικές εφαρμογές του θεωρήματος της πληρότητας οι οποίες μπορεί να φαίνονται προφανείς ή κάπως σχολαστικές. Ο λόγος που τις περιλαμβάνουμε είναι για να καταλάβουμε λίγο περισσότερο τις επιπτώσεις της κατασκευής του Dedekind και για να αποκτήσουμε μεγαλύτερη οικειότητα με τον τρόπο χρήσης του θεωρήματος της πληρότητας. Θα γίνει έτσι περισσότερο κατανοητή η σημασία της κατασκευής του Dedekind.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε δύο θεωρήματα για τη κατανομή των ακεραίων και των ρητών. Θα επιλέξουμε όλους τους αριθμούς να είναι θετικοί για να αποφύγουμε τη περιπτώσιολογία. Οι αποδείξεις που θα δώσουμε εύκολα προσαρμόζονται αν δεν κάνουμε αυτή την παραδοχή. Θα αποδείξουμε

α) ότι για $\alpha > 0$ υπάρχει μόνο ένας θετικός ακέραιος στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 1)$.

β) ότι για κάθε $\beta > \alpha > 0$ υπάρχει ρητός r αναμέσα τους, που είναι $\beta > r > \alpha$.

Και οι δύο παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν από μία άλλη ιδιότητα την οποία διατύπωσε ο Αρχιμήδης (Αξίωμα 5 στο βιβλίο του “Περί σφαίρας και κυλίνδρου”)⁵ και η οποία στο πλαίσιο της κατασκευής των πραγματικών αριθμών που παρουσιάσαμε είναι πόρισμα της πληρότητας. Η ιδιότης αυτή βεβαιώνει ότι για

⁵Ο Αρχιμήδης αποδίδει το αξίωμα αυτό στον “θεώρημα του Ευδόξου”. Επίσης η ιδιότης αυτή εμφανίζεται και στα Στοιχεία του Ευκλείδη (βιβλίο 5 ορισμός 4).

κάθε πραγματικό $\alpha > 0$ υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος ν που ικανοποιεί την ανισότητα $1/\nu < \alpha$ ή ότι για κάθε πραγματικό $\beta > 0$ υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος ν μεγαλύτερος του β . Η Αρχιμήδεια ιδιότητα βεβαιώνει ότι υπάρχουν οσοδήποτε μικροί και μεγάλοι πραγματικοί αριθμοί.

Αρχιμήδεια Ιδιότητα: Για κάθε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ υπάρχει ακέραιος $\nu > 0$ που ικανοποιεί την ανισότητα $\nu\alpha > \beta$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα. Τότε υπάρχουν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τέτοια ώστε να είναι $\nu\alpha \leq \beta$ για κάθε $\nu > 0$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο Σ που έχει ως στοιχεία του τα $\nu\alpha$. Τότε το σύνολο Σ είναι άνωθεν φραγμένο δεδομένου ότι το β είναι άνω φράγμα του Σ . Έστω ότι το supremum του Σ είναι το ξ , και γράφουμε $\xi = \sup \Sigma$. Τότε $\xi - \alpha < \xi$ και θα υπάρχει ακέραιος ν_0 που ικανοποιεί την ανισότητα $\xi - \alpha < \nu_0\alpha$. Αλλά τότε $\xi < (\nu_0 + 1)\alpha$ που είναι άτοπο διότι το ξ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τα $\nu\alpha$ για κάθε ν . Άρα ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα για να αποδείξουμε πρώτα την πιο εύκολη πρόταση ότι μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντοτε άρρητος. Έστω $r_1 > r_2$ δύο ρητοί αριθμοί. Τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα γνωρίζουμε ότι υπάρχει ν τέτοιο ώστε $\nu(r_1 - r_2) > \sqrt{2}$ ή $r_1 > r_2 + \sqrt{2}/\nu$. Ο αριθμός $\xi = r_2 + \sqrt{2}/\nu$ είναι άρρητος και ικανοποιεί την ανισότητα $r_1 > \xi > r_2$, και με τον τρόπο αυτό κατασκευάσαμε άρρητο μεταξύ των δύο ρητών. Μάλιστα η κατασκευή αυτή μας οδηγεί στην κατασκευή απείρων αρρήτων μεταξύ των δύο αυτών ρητών. Σκεφθείτε αν με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι μεταξύ δύο αρρήτων υπάρχει απειρία αρρήτων (το άθροισμα δύο αρρήτων είναι πάντα άρρητος;).

Θα μας χρειασθεί για την συνέχεια η εξής πρόταση:

Πρόταση:

Έστω A ένα μη κενό σύνολο με στοιχεία ακέραιους αριθμούς (όχι κατά ανάγκη πεπερασμένο) το οποίο είναι άνωθεν φραγμένο. Τότε το σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το θεώρημα της πληρότητας (που ισχύει για κάθε είδους φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών) το A θα έχει supremum το αριθμό α . Επειδή το α είναι supremum θα υπάρχει (ακέραιο) στοιχείο ν του A που θα ικανοποιεί τις ανισότητες $\alpha \geq \nu > \alpha - 1$. Συνεπώς $\nu + 1 > \alpha \geq \nu$. Επειδή όμως στο διάστημα $[\nu, \nu + 1)$ δεν υπάρχει ακέραιος άλλος από τον ν , το ν , που ανήκει στο A , είναι και το μεγαλύτερο στοιχείο του A και συγχρόνως το supremum του, δηλαδή $\alpha = \nu$. [Παρατηρείστε στην απόδειξη αυτή ότι το θεώρημα της πληρότητας εξασφάλισε την ύπαρξη του α , ο οποίος έπειτα εξασφάλισε την ύπαρξη του

αριθμού ν , οποίος είναι προφανώς ο μέγιστος του συνόλου.]

Πρόταση:

Για κάθε αριθμό $\alpha > 0$ υπάρχει ένας και μόνο ένας θετικός ακέραιος στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 1)$.

Απόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο Σ που έχει στοιχεία τους ακέραιους που είναι $\nu < \alpha + 1$. Το σύνολο Σ δεν είναι κενό, π.χ. το $\nu = 1$ ανήκει σε αυτό. Το φραγμένο αυτό σύνολο των ακεραίων Σ έχει μέγιστο στοιχείο, έστω το ν_0 . Το στοιχείο αυτό είναι μικρότερο από το $\alpha + 1$ και $\nu_0 \geq \alpha$ διότι αν ήταν $\nu_0 < \alpha$ τότε και $\nu_0 + 1 < \alpha + 1$, που είναι αντίθετο στην υπόθεση ότι το ν_0 είναι ο μέγιστος του Σ . Άρα υπάρχει ακέραιος στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 1)$. Είναι μοναδικός διότι αν υπήρχε και άλλος στο διάστημα αυτό η διαφορά τους θα ήταν μικρότερη από το 1, που είναι αδύνατο αν οι ακέραιοι είναι διαφορετικοί.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι **μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει πάντα αναμέσα τους ρητός αριθμός.**

Απόδειξη: Έστω οι αριθμοί: $\alpha < \beta$. Απο την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει ν τέτοιο ώστε $(b - a) > 1/n$ ή $a < b - 1/n$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ακέραιος m που ανήκει στο διάστημα $[nb - 1, nb)$, δηλαδή ικανοποιεί την ανισότητα $nb - 1 \geq m < nb$ ή ισοδύναμα $a < b - 1/n \leq m/n < b$ που συνεπάγεται ότι υπάρχει ρητός m/n α και β .