

Σημειώσεις Ανάλυσης I

1 Ο αριθμός e και η εκθετική συνάρτηση

Το κείμενο αυτό συμπληρώνει τις σημειώσεις περί ακολουθιών (βλ.) στις οποίες δείξαμε ότι η ακολουθία

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι αύξουσα και φραγμένη (δείξαμε π.χ. ότι ένα τέτοιο φράγμα είναι ο αριθμός 3) και συνεπώς υπάρχει το όριο αυτής της ακολουθίας για $n \rightarrow \infty$. Το όριο της ακολουθίας αυτής ορίζει τον αριθμό e με προσεγγίζουσα τιμή $e = 2.71821\dots$

Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η παραπλήσια ακολουθία

$$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

είναι αντιστοίχως φθίνουσα (δεν θα επαναλάβω την απόδειξη, είναι απλώς πράξεις), και επειδή για κάθε n είναι $2 \leq \alpha_n < \beta_n$, έχει και αυτή ως όριο της το e (επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0$). Παρατηρούμε δε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η ανισότητα:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Επίσης δείξαμε στις σημειώσεις για τις ακολουθίες ότι το όριο e προκύπτει ακόμα και όταν ο δείκτης n πηγαίνει στο άπειρο με οποιονδήποτε τρόπο. Δείξαμε εκεί ότι αν η ακολουθία $|\alpha_n| \rightarrow \infty$ τότε και πάλι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e,$$

και συνεπώς για κάθε πραγματικό x θα είναι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad (1)$$

Αυτό προκύπτει διότι αν λάβουμε την ακολουθία $\alpha_n = n/x$ (για $x = 0$ προφανώς ισχύει η ισότητα, οπότε λαμβάνουμε $x \neq 0$), θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x} = e,$$

και εξ'αυτού προκύπτει η (1). Η (1) είναι ο ορισμός της εκθετικής πραγματικής συνάρτησης e^x για x πραγματικό αριθμό.

Μπορεί, ακολουθώντας τα ίδια βήματα να αποδείξουμε (να το κάνετε) ότι για κάθε n ισχύει η ανισότητα

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \quad \text{για } x > 0. \quad (2)$$

Η ανισότητα αυτή είναι πολλή χρήσιμη.

Αξίζει να παρατηρήσουμε πόσο λεπτό είναι το όριο e . Θα δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n^\mu}\right)^n, \quad \text{με } \mu > 1,$$

τείνει στο 1. Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^\mu}\right)^{n^\mu} = e$$

θα είναι σύμφωνα με τα προηγούμενα για κάθε n

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^\mu}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^\mu}\right)^{n^\mu}\right)^{1/n^{\mu-1}} < e^{1/n^{\mu-1}}.$$

Επειδή δε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n^{\mu-1}} = 1, \quad \text{για κάθε } a > 0, \quad (3)$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^\mu}\right)^n = 1, \quad \text{όταν } \mu > 1.$$

Μένει να αποδειχθεί η (3). Για $a > 1$ είναι για κάθε n , $a^{1/n^\mu} > 1$ και αν γράψουμε $a^{1/n^\mu} = 1 + \beta_n$ τότε το $\beta_n > 0$. Εξ'αυτού έχουμε ότι $(1 + \beta_n)^{n^\mu} = a$ και επειδή $\beta_n > 0$ θα είναι $n^\mu \beta_n < (1 + \beta_n)^{n^\mu} = a$ και η ακολουθία β_n είναι μηδενική διότι $\beta_n < a/n^\mu$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι αν $a > 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n^\mu} = 1$. Αν τώρα $0 < a < 1$ τότε $(1/a)^{1/n^\mu} \rightarrow 1$ και επειδή $(1/a)^{1/n^\mu} = 1/a^{1/n^\mu}$ και σε αυτή τη περίπτωση $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n^\mu} = 1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^\mu}\right)^n = e^x, \quad \text{για } \mu > 1. \quad (4)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^\mu}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n/(x(1 + (y/x)/n^{\mu-1}))}\right)^n \\ &= \left[\left(\left(1 + \frac{1}{n/(x(1 + (y/x)/n^{\mu-1}))}\right)^{n/(x(1 + (y/x)/n^{\mu-1}))}\right)^x\right]^{1 + (y/x)/n^{\mu-1}}, \end{aligned}$$

που γράφεται στη μορφή $[(\alpha_n)^x]^{\beta_n}$, επειδή δε $\alpha_n \rightarrow e$ και $\beta_n \rightarrow 1$, θα ισχύει ότι $[(\alpha_n)^x]^{\beta_n} \rightarrow e^x$.

2 Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι

$$e^x e^y = e^{x+y}. \quad (5)$$

Εδώ το e^x δεν θεωρείται ως το e υψομένο στη δύναμη του πραγματικού αριθμού x , που δεν ξέρουμε πως ορίζεται (τι είναι ο αριθμός e στη δύναμη x ; x φορές ο e όταν ο x μπορεί να είναι και ο άρρητος $\sqrt{2}$;). Το e^x ορίζεται ως το όριο (1), οπότε η πρόταση πρέπει να αποδειχθεί. Δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε την ισότητα των εξής ορίων:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n.$$

Για να αποδειχθεί αυτό κάνουμε τα εξής βήματα και χρησιμοποιούμε την (4):

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right] & (6\alpha') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) \right]^n & (6\beta') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

Για να πάμε από την (6α') στην (6β') χρησιμοποιήσαμε την αντιμεταθετική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών $xy = yx$ ή λεγμένο διαφορετικά την ιδιότητα ότι ο μεταθέτης των x και y , που ορίζεται ως $[x, y] \equiv xy - yx$, είναι 0. Αν δεν ισχύει αυτή η ιδιότητα τότε μπορεί $e^x e^y \neq e^{x+y}$. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στη Φυσική (ιδιαίτερος στη κβαντική μηχανική) διότι ορίζουμε μέσω της (1) και το e^x , όταν ο x δεν είναι πραγματικός αριθμός, αλλά άλλο μαθηματικό αντικείμενο, όπως π.χ. ένας πίνακας, το οποίο δεν ικανοποιεί αναγκαστικά την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Επειδή από την (1) είναι προφανές ότι $e^0 = 1$ και από την (5) ότι $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$, καταλήγουμε στη σχέση

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (7)$$

δηλαδή μπορούμε πλέον να θεωρούμε ότι η e^x συμπεριφέρεται όπως και οι δυνάμεις πραγματικών αριθμών.

Με αυτό τον τρόπο δίνουμε τον ορισμό στη συνάρτηση

$$a^x \equiv e^{x \log a},$$

(ο $\log a$ θα ορισθεί παρακάτω). Έχουμε δε δείξει ότι μπορεί να τη χειρισθούμε όπως χειριζόμαστε τις δυνάμεις n^m , στην αριθμητική με n, m ακεραίους.

Τώρα θα δείξουμε ότι είναι

$$e^x > 1 \text{ με } x > 0, \quad 0 < e^x < 1 \text{ με } x < 0. \quad (8)$$

Απ. Αρκεί να αποδείξουμε τη πρώτη πρόταση για $x > 0$, η δεύτερη προκύπτει αμέσως από την ιδιότητα (7). Αν $x > 0$ από την (2) έχουμε αμέσως ότι $e^x > 1$.

Η συνάρτηση e^x είναι γνωσίως αύξουσα (και συνεπώς η e^{-x} γνησίως φθίνουσα). Απ. Αν $x > y$ θα είναι $x - y > 0$ και από τη προηγούμενη πρόταση $e^{x-y} = e^x e^{-y} = e^x / e^y > 1$ και $e^x > e^y$.

Η συνάρτηση e^x είναι συνεχής στο 0. Θα δείξουμε πρώτα ότι για $x > 0$ ότι αν $x \rightarrow 0$ τότε $e^x \rightarrow e^0 = 1$ και συνεπώς η e^x είναι συνεχής στο 0 από δεξιά. Αυτό προκύπτει πάλι από την (2). Διότι για δεδομένο n και για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}.$$

Τώρα λαμβάνοντας το όριο $x \rightarrow 0$ αυτής της ανισότητας έχουμε $e^x \rightarrow 1$ και συνεπώς η e^x είναι συνεχής στο 0 από θετικές τιμές (από δεξιά, αυτό συμβολίζεται και $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$). Βασιστήκαμε στην πρόταση ότι τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν τώρα η e^x είναι συνεχής στο 0 με $x > 0$, τότε είναι συνεχής και η $1/e^x$ ή η e^{-x} στο 0. Δηλαδή, $e^x \rightarrow 1$ και όταν $x \rightarrow 0^-$ από αρνητικές τιμές. Λόγω της ιδιότητας (5) η συνέχεια της e^x στο 0 συνεπάγεται τη συνέχεια της e^x σε κάθε x . Πράγματι, αν $x \rightarrow x_0$ τότε και $x - x_0 \rightarrow 0$ και έχουμε δείξει ότι $e^{x-x_0} \rightarrow 1$ οπότε και $e^x \rightarrow e^{x_0}$ όταν $x \rightarrow x_0$ και η e^x είναι συνεχής για κάθε x .

Τώρα θα δείξουμε ότι η e^x είναι παραγωγίσιμη παντού και ότι

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon}$$

διότι

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{x+\epsilon} - e^x}{\epsilon} \\ &= e^x \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon}\end{aligned}$$

Από την (2) έχουμε πάλι για $\epsilon > 0$ και δεδομένο n :

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right)^n < e^\epsilon < \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right)^{n+1}.$$

Συνεπώς επειδή και οι δύο συναρτήσεις που φράζουν την εκθετική είναι παραγωγίσιμες στο $\epsilon = 0$ θα είναι:

$$1 \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Επειδή οι ανισότητες αυτές ισχύουν για κάθε n προκύπτει ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} = 1$$

διότι αν το όριο αυτό ήταν οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το 1 τότε θα ερχόταν σε αντίφαση με την παραπάνω ανισότητα για αρκούντως μεγάλο n . Το ίδιο ισχύει για το όριο από αριστερά, διότι το όριο από αριστερά μπορεί να γραφεί με $\epsilon > 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\epsilon} - 1}{-\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} \\ &= 1\end{aligned}$$

Συνεπώς η συνάρτηση e^x είναι παραγωγίσιμη για κάθε x και η παραγωγός συνάρτηση είναι η ίδια η συνάρτηση, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση παραμένει αναλλοίωτη όταν δράσουμε σε αυτή με τη πράξη της παραγώγισης.

Τώρα θα δείξουμε ότι η συνάρτηση e^x τείνει στο άπειρο πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη x^k , δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Πάλι κάνουμε χρήση της (2). Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ είναι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} = \alpha x^{k+1}$$

όπου α κάποιος δεδομένος αριθμός. Συνεπώς από την (2) θα έχουμε

$$\frac{x^k}{e^x} < \frac{1}{\alpha x}$$

που τείνει στο μηδέν για $x \rightarrow \infty$. Από αυτή την πρόταση προκύπτει ότι η e^x τείνει στο μηδέν για $x \rightarrow -\infty$ πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη $1/x^k$.