

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι

Β' σειρά ασκήσεων Ανάλυσης Ι

25/1/2014

Π. Ιωάννου – Θ. Αποστολάτος

1. (α) Αληθές ή ψευδές; (Αν είναι αληθές αποδείξτε την πρόταση, αν είναι ψευδές δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η πρόταση δεν ισχύει (αυτό λέγεται αντιπαράδειγμα.) Εάν χ ρητός και ψ άρρητος τότε ο $\chi + \psi$ είναι άρρητος. (β) Εάν χ και ψ άρρητοι τότε ο $\chi + \psi$ είναι άρρητος. (γ) Εάν χ άρρητος και ψ μη μηδενικός ρητός τότε το γινόμενο $\chi \psi$ είναι άρρητος.
2. Στην τάξη δείξαμε ότι οι θετικοί ρητοί είναι αριθμήσιμοι. Με ανάλογο τρόπο δείξτε ότι όλοι οι ρητοί (θετικοί και αρνητικοί) είναι αριθμήσιμοι.
3. *Ορικό σημείο* ή *σημείο συμπυκνώσεως* συνόλου Σ . Το ξ είναι ορικό σημείο του Σ αν σε κάθε διάστημα που περιέχει το ξ περιέχεται τουλάχιστον ένα στοιχείο του Σ που διαφέρει από το ξ . Τα διαστήματα που περιέχουν το ξ μπορούν να ληφθούν χωρίς βλάβη της γενικότητας ως τα ανοικτά ή και τα κλειστά διαστήματα $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$, με ϵ οποιονδήποτε θετικό. Από τον όρισμο έπεται ότι αν το ξ είναι ορικό σημείο του Σ υπάρχει απειρία στοιχείων του Σ στη περιοχή του ξ , δηλαδή υπάρχει απειρία στοιχείων του Σ στο διάστημα $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$, όπου ϵ αυθαίρετος θετικός αριθμός. Δείξτε ότι: (α) Το σύνολο των αριθμών $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$ έχει ορικό σημείο το 0. (β) Το σύνολο των ακεραιών δεν έχει ορικό σημείο. (γ) Προσδιορίστε τα ορικά σημεία του συνόλου $-1/2, 1 + 1/2, 2, -1/3, 1 + 1/3, 3, -1/4, 1 + 1/4, 4, \dots$.
4. Θεωρήστε τώρα ένα φραγμένο σύνολο Σ που περιέχει άπειρα στοιχεία. Θα δείξετε ότι το σύνολο αυτό έχει αναγκαστικά τουλάχιστον ένα ορικό σημείο. Η πρόταση αυτή ονομάζεται Θεώρημα Weierstrass-Bolzano. Χωρίστε τους πραγματικούς αριθμούς σε δύο τάξεις A (αριστερή τάξη) και Δ (δεξιά τάξη). Το a ανήκει στην A αν υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός στοιχείων του Σ που είναι μικρότερα από το a . Το δ ανήκει στη Δ αν υπάρχουν άπειρα στοιχεία του Σ που είναι μικρότερα από το δ . Για να καταλάβετε τον διαχωρισμό κατασκευάστε τις τάξεις A και Δ για το φραγμένο σύνολο με στοιχεία $\nu/(\nu + 1)$ όπου $\nu = 1, 2, 3, 4, \dots$. Δείξτε τώρα ότι τα A και Δ δεν είναι κενά σύνολα, ότι κάθε $a < \delta$, και επειδή τα A και Δ περιέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς το $\xi = (A|\Delta)$ είναι μία τομή Dedekind. Δείξτε ότι το ξ είναι ορικό σημείο του Σ . Προσδιορίστε με τον τρόπο αυτό το ορικό σημείο του συνόλου με στοιχεία $\nu/(\nu + 1)$ όπου $\nu = 1, 2, 3, 4, \dots$.
5. Εάν χ και ψ (θετικοί) πραγματικοί αριθμοί και $\psi > \chi$ τότε υπάρχει φυσικός ν τέτοιος ώστε $\nu\chi > \psi$ (η ιδιότητα αυτή λέγεται Αρχιμήδεια). [Υπόδ. Δείξτε ότι υπάρχει αναγκαστικά φυσικός ν που να είναι $1/\nu < \chi/\psi$.]
6. Δώστε ένα παράδειγμα ένος συνόλου ρητών αριθμών που έχουν ρητό αριθμό ως ανώτερο πέρας (supremum) και ενός συνόλου αρρήτων αριθμών που έχουν ανώτερο πέρας ρητό αριθμό.