ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στην Ανάλυση Ι

6 Φεβρουαρίου 2013

Να λυθούν 3 από τα ακόλουθα 5 θέματα.

Όνομα - Επώνυμο ....

Αριθμ. Μητρώου ....

Ημερομηνία ....

ΘΕΜΑ Α	ΘΕΜΑ Β	ΘΕΜΑ Γ	ΘΕΜΑ Δ	ΘΕΜΑ Ε

ΘΕΜΑ Α

Έστω μια συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ x^3 & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος.} \end{cases}$$

(α) Εξετάσατε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x)$.

(β) Εξετάσατε αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$.

ΘΕΜΑ Β

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\text{συν}\theta d\theta}{3+2\text{ημ}\theta}.$$

2. Εξετάσατε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+6^n}{7^n+4^n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \text{τοξεφ}\left(\frac{n^3+1}{n^2+5}\right).$$

ΘΕΜΑ Γ

1. Έστωσαν η πραγματική συνάρτηση $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, με $a \in \mathbb{R}$ και $\gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (α) Το όριο
   $$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \gamma.$$

   (β) Για κάθε ακολουθία $t_n \in (-\infty, a]$, $n \in \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ έπεται ότι
   $$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \gamma.$$

2. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία w_n $(n \geq 1)$ με
   $$w_n = \frac{x^2 l^n + y^2}{\pi e + l^n}, \quad \text{όπου } l = \pi^{(x^2+y^2-e)}, \quad \text{και } x, y \in \mathbb{R}$$
   και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ έτσι ώστε
   $$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{\pi + e^{-1}}.$$

3. Να γραφεί αναλυτικά η άρνηση της πρότασης
   $$\lim_{n\to\infty} t_n = \sqrt{e}\pi^{-1}.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έστω $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με την ιδιότητα $y_1(p) = y_2(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{Q}$. Να δειχθεί ότι $y_1(t) = y_2(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

2. Έστω η φραγμένη πραγματική συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, με $a < b$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann

$$\int_a^b f(t)dt.$$

ΘΕΜΑ Ε

Σύμφωνα με το θεώρημα Taylor εάν μία συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα (x_1, x_2) που περιλαμβάνει το a, τότε για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και κάθε θετικό ακέραιο n, η τιμή της συνάρτησης στο x δίνεται από το ανάπτυγμα:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(f, a, x),$$

όπου $R_n(f, a, x)$ κάποιο υπόλοιπο.

1. Να προσδιορίσετε το υπόλοιπο αυτό ως συνάρτηση του $f^{(n+1)}$ (με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε την n-οστή παράγωγο, ενώ f' συμβολίζει την πρώτη και f'' τη δεύτερη παράγωγο).

2. Υπό ποιες προϋποθέσεις οι τιμές της συνάρτησης μπορούν να προσδιορισθούν από την αντίστοιχη άπειρη σειρά Taylor (δηλαδή για $n \to \infty$ χωρίς το υπόλοιπο R_n);

3. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$f''(x) = f(x) \tag{1}$$

   και λαμβάνει τις τιμές $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Είναι η f συνεχής;

4. Εάν $R > 0$ και j κάποιος θετικός ακέραιος, εξηγήστε γιατί μπορούμε να βρούμε ένα M_j τέτοιο ώστε για κάθε $|x| \leq R$

$$|f^{(j)}(x)| \leq M_j.$$

5. Εξηγήστε, τώρα, γιατί η εξίσωση (1) επιβάλλει να υπάρχει ένα ανώτερο φράγμα M που να φράσσει όλες τις παραγώγους, να ικανοποιεί δηλαδή την ανισότητα:

$$|f^{(j)}(x)| \leq M$$

   για κάθε $|x| \leq R$ και κάθε $j \geq 0$.

6. Αποδείξτε, κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Taylor, ότι η

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

   ικανοποιεί την εξίσωση (1) και τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες στο 0.

7. Βρείτε τη σχέση της συνάρτησης αυτής με την e^x και την e^{-x}, και φτιάξτε ποιοτικά το γράφημά της.