



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Ανάλυση I
28 Οκτωβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1 Σε καθένα από τα παρακάτω σύνολα προσδιορίστε α) αν είναι άνω φραγμένα β) κάτω φραγμένα και προσδιορίστε γ) το ανώτερο πέρας (sup) και το κατώτερο πέρας (inf) εφόσον υπάρχουν και δ) κατά πόσον αυτά ανήκουν στο σύνολο. (Με Q συμβολίζουμε τους ρητούς αριθμούς και με \mathbb{R} τους πραγματικούς.).

(α) $\{r \in Q, r < 2\}$

(β) $\{r \in Q, r^2 < 2\}$

(γ) $\{r \in Q, r^3 < 2\}$

(δ) $\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$

(ε) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

(στ) $\{x^2, x \in \mathbb{R}\}$

Άσκηση 2 Προσδιορίστε και αποδείξτε ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές

(α) $\sin n\pi$

(β) $\sin(n\pi/2)$

(γ) $n^{-1} \sin(n\pi/4)$

(δ) $n/(n^2 + 1)$

Άσκηση 3 Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο των πραγματικών \mathbb{R} το οποίο είναι φραγμένο άνωθεν και το $\sup A$ ανήκει στο A τότε $\sup A = \max A$. [Υπ. η απόδειξη σας πρέπει να είναι πολύ σύντομη].

Άσκηση 4 Τα A και B είναι μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} .

(α) Δείξτε ότι αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

(β) Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ (μην υποθέσετε εδώ ότι $A \subseteq B$) [με $A \cup B$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αριθμών που είναι στο A ή στο B ή και στα δύο].

(γ) Μπορείτε να πείτε κάτι ανάλογο με το (β) για το $A \cap B$, το σύνολο δηλαδή των αριθμών που ανήκουν και στο A και στο B ;