ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι

19 Οκτωβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1 Κατασκευάζουμε τον αριθμό ξ ως την τομή των δύο τάξεων ρητών: αυτών που το τετράγωνο τους είναι μικρότερο του 2 και αυτών που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο από 2. Υποθέστε ότι ο αριθμός αυτός υπακούει στις γνωστές πράξεις της άλγεβρας, έτσι ώστε π.χ. το ξ^2 να ορίζεται. Δείξτε τότε ότι το ξ^2 δεν μπορεί να είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από 2. Συνεπώς $\xi^2 = 2$.

Άσκηση 2 Χωρίστε τους ρητούς σε δύο τάξεις Α,Δ τέτοιες ώστε α) κάθε ρητός να ανήκει μόνο σε μία απο αυτές τις τάξεις, β) κάθε στοιχείο της Α είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο της Δ. Μπορεί η Α να μην έχει μέγιστο και η Δ να μην έχει ελάχιστο. Δείξτε ότι αν η Δ έχει μέγιστο, τότε η Δ δεν έχει ελάχιστο, και αν η Δ έχει ελάχιστο τότε η Α δεν έχει μέγιστο, δηλαδή δεν μπορεί και η Α να έχει μέγιστο και η Δ ελάχιστο. [Υπ. Αν x ο μέγιστος της Α και y ο ελάχιστος της Δ θεωρήστε τον $(x+y)/2$.]

Άσκηση 3 Χωρίζουμε τώρα τους πραγματικούς σε δύο τάξεις Α και Δ με τις ιδιότητες α) κάθε πραγματικός να ανήκει μόνο σε μία από αυτές τις τάξεις, β) κάθε στοιχείο της Α να είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο της Δ. Τότε με τα ίδια επιχειρήματα της Άσκ. 2 ξέρουμε ότι ή η Α θα έχει μέγιστο στοιχείο ή η Δ θα έχει ελάχιστο και δεν μπορεί η Α και η Δ να έχουν συγχρόνως μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα. Θεωρήστε τώρα τις τάξεις A_ρ των ρητών της Α, και Δ_ρ των ρητών της Δ. Δείξτε ότι αν η A_ρ έχει μέγιστο τον ρητό x τότε και η Α έχει μέγιστο τον x. Αυτό αποδεικνύει ότι αν η τομή των δύο τάξεων A_ρ, Δ_ρ ορίζει ρητό αριθμό τότε και η άντίστοιχη τομή των πραγματικών αριθμών Α, Δ ορίζει τον ίδιο ρητό αριθμό. Αν τώρα η A_ρ δεν έχει μέγιστο και η Δ_ρ ελάχιστο τότε η τομή των A_ρ και Δ_ρ ορίζει τον πραγματικό αριθμό ξ. Δείξτε τώρα ότι ο ξ θα είναι ή ο μέγιστος της Α ή ο ελάχιστος της Δ. Δείξατε δηλαδή ότι σε κάθε περίπτωση ότι ή η Α έχει μέγιστο ή η Δ ελάχιστο. Δηλαδή κάθε τομή πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί στον ίδιο αριθμό που προκύπτει από την τομή των ρητών, δηλαδή οι τομές πραγματικών αριθμών δεν οδηγούν σε νέους αριθμούς και υπό αυτή την έννοια οι πραγματικοί αριθμοί είναι πλήρεις.

Άσκηση 4 Σε καθένα από τα παρακάτω σύνολα προσδιορίστε α) αν είναι άνω φραγμένα, β) κάτω φραγμένα και προσδιορίστε γ) το ανώτερο πέρας (sup) και το κατώτερο πέρας (inf) εφόσον υπάρχουν και δ) κατά πόσον αυτά ανήκουν στο σύνολο. (Με **N** συμβολίζουμε τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, \ldots$. Ο ορισμός των συνόλων περιλαμβάνεται σε $\{\}$ και $[a, b]$ είναι το κλειστό διάστημα αριθμών που ικανοποιούν $a \leq x \leq b$).

(α) $[0, 1]$

(α) $\{1/n \quad n \in N\}$

(β) $\{\sin n \quad n \in N\}$

(γ) $\{\tan n \quad n \in N\}$

(δ) $\cap_{n=1}^{\infty}[-1/n, 1+1/n]$

(ε) $\cap_{n=1}^{\infty}[1-1/n, 1+1/n]$

Άσκηση 5 Αποδείξτε τις ταυτότητες

(α)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(β)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

(γ)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Χρησιμοποιήστε την (γ) για να κατασκευάσετε το τρίγωνο του Pascal. [Υπ. για το (α) υπολογίστε το $(1+1)^n$ για το (γ) μπορείτε να το αποδείξετε παρατηρώντας ότι $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.]