



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση I

12 Οκτωβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1 Έστω a/b ρητός μικρότερος του $\sqrt{2}$. Τότε ο $(a+2b)/(a+b)$ είναι ρητός μεγαλύτερος από το $\sqrt{2}$ και αποτελεί καλύτερη ρητή προσέγγιση του $\sqrt{2}$. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίστε δύο ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$, εκατέρωθεν του $\sqrt{2}$, που διαφέρουν μεταξύ τους λιγότερο από 10^{-5} .

Άσκηση 2 (Gauss 1777-1855). Εάν οι a_1, \dots, a_n είναι ακέραιοι τότε οι ρητές ρίζες του πολωνύμου (αν υπάρχουν)

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

είναι αναγκαστικά ακέραιοι αριθμοί που διαιρούν το a_n . (Υπόδειξη: θέστε $x = r/s$ και πολλαπλασιάστε αρχικά με το s^{n-1}). Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να δείξετε ότι ο $\sqrt[m]{m}$ (m, n φυσικοί αριθμοί) είναι είτε ακέραιος είτε άρρητος και ακολούθως δείξετε ότι αναγκαστικά οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητοι.

Άσκηση 3 Τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι ρητοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε το κλάσμα

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$$

να είναι ρητός αριθμός όταν το ξ είναι άρρητος;

Άσκηση 4 Εάν οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί και ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$$

τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις τιμές των ρητών αριθμών α, β, γ ;