



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση I

9 Νοεμβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Ασκηση 1 Δείξτε ότι αν η ακολουθία α_n συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.

Ασκηση 2 Δείξτε ότι αν η ακολουθία α_n συγκλίνει σε ένα αριθμό $1 > K > 0$ τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε για $n > N$ να είναι $\alpha_n < k$ όπου $k < 1$.

Ασκηση 3 Υπολογίστε το όριο της $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Ασκηση 4 Θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

με $0 < y_1 < x_1$.

- Δείξτε ότι οι y_n σχηματίζουν μία αύξουσα ακολουθία, ενώ οι x_n μία φθίνουσα ακολουθία.
- Δείξτε ότι $0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_n - y_n)/2$ και εξ αυτού ότι η x_n και η y_n τείνουν στο ίδιο όριο (που ονομάζεται ο αριθμητικο-γεωμετρικός μέσος των $0 < y_1 < x_1$).
- Υπολογίστε τον αριθμητικο-γεωμετρικό μέσο των 1 και 2.

Ασκηση 5 (Αρχιμήδης) Θεωρήστε τις ακολουθίες:

$$x_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}, \quad y_n = \sqrt{x_n y_{n-1}}$$

με $x_0 = 2\sqrt{3}$ και $y_0 = 3$.

- Δείξτε ότι οι y_n σχηματίζουν μία αύξουσα ακολουθία, ενώ οι x_n μία φθίνουσα ακολουθία οι οποίες είναι και οι δύο συγκλίνουσες.
- Δείξτε ότι η x_n και η y_n τείνουν στο ίδιο όριο (που το συμβολίζουμε π) το οποίο είναι

$$3.14155 < \pi < 3.14161.$$