ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι

27 Οκτωβρίου 2012

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Παρατήρηση πάνω στην άσκηση4β, 4γ της ομάδας ασκήσεων της 19/10/12.

Η άσκηση αυτή είναι μια πραγματική πρόκληση και όπως θα δείξουμε θα μας οδηγήσει σε εξαιρετικές ανακαλύψεις. Απ' ότι φαίνεται η απάντηση στο ερώτημα αυτό σχετίζεται με τα ψηφία του π που κανένας δεν γνωρίζει πλήρως αφού ο π είναι υπερβατικός άρρητος (δεν είναι το αποτέλεσμα καμίας αλγεβρικής εξίσωσης).

Για να διαφανεί πιο καθαρά το πρόβλημα που αναδεικνύεται από αυτή την άσκηση, θα τροποποιήσουμε ελαφρώς το ζητούμενο, ζητώντας ποιο είναι το supremum του συνόλου των αριθμών $|\cos n|$ όπου n φυσικός αριθμός (η ουσία του προβλήματος δεν θα αλλάξει, αλλά οι πράξεις θα είναι πιο εύκολες). Ίσως κάποιος αβίαστα να υπέθετε (όπως αρχικά υποθέσαμε και εμείς) ότι είναι το 1 με τη λογική ότι ένας αρκούντως μεγάλος φυσικός αριθμός θα μπορούσε να προσεγγίσει οσοδήποτε ένα πολλαπλάσιο του π "σπρώχνοντας" έτσι το $|\cos n|$ οσοδήποτε κοντά στη μονάδα. Η λογική αυτή στηρίζεται στην εικόνα που έχουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί (μετρώντας τόξα) τυλίσσονται στον τριγωνομετρικό κύκλο έτσι ώστε να γεμίσουν αυτόν πυκνά μη αφήνοντας κανένα κενό και ειδικά γύρω από την περιοχή των γωνιών ±π όπου το $|\cos x|$ λαμβάνει τη μέγσιτη τιμή του 1. Ας ελέγξουμε λοιπόν αν η διαίσθητική αυτή πρόταση είναι ορθή.

Έστω ότι θέλουμε να πλησιάσουμε μέσω του $\cos n|$ τη μονάδα σε απόσταση μικρότερη από 10^{-k}. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε το $|\cos n|$ να είναι μεγαλύτερο από $1-10^{-k}$, δηλαδή το n θα πρέπει να διαφέρει από οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του π όχι περισσότερο από $\sqrt{2\times 10^{-k}}$ (αφού για μικρές γωνίες θ ισχύει $\cos\theta > 1-\theta^2/2$).

Για αρχή ας περιορίσουμε λίγο το πρόβλημά μας και ας υποθέσουμε ότι το n είναι πολύ κοντά σε κάποιο πολλαπλάσιο του π της μορφής 10^pπ και όχι σε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο (δηλαδή πολλαπλάσιο του π που δεν είναι δύναμη του 10) . Πράγματι αν διαλέξουμε το n να είναι ίσο με το ακέραιο μέρος $[10^p\text{π}]$ (δηλαδή τον αριθμό χωρίς τα δεκαδικά του ψηφία), η διαφορά του n με το προαναφερθέν πολλαπλάσιο του π θα είναι της τάξης του πρώτου μη μηδενικού δεκαδικού ψηφίου του π μετά την p θέση. Αν θέλουμε λοιπόν να πλησιάσουμε οσοδήποτε τη μονάδα τουλάχιστον με αυτή την επιλογή φυσικών αριθμών, θα πρέπει ο π να περιέχει ομάδες συνεχόμενων μηδενικών στη δεκαδική του μορφή οι οποίες να είναι οσοδήποτε μεγάλες. Κανείς όμως δεν γνωρίζει αν αυτό ισχύει. Από στατιστικούς ελέγχους που έχουν γίνει μέχρι σήμερα που γνωρίζουμε τον π με ακρίβεια τρισεκατομμυρίων δεκαδικών ψηφίων φαίνεται ότι όσο περισσότερα ψηφία του π λάβουμε υπόψη τόσο μεγαλύτερες ομάδες μηδενικών εμφανίζονται. Μάλιστα φαίνεται ότι για να εμφανιστεί ομάδα q συνεχόμενων μηδενικών στη δεκαδική γραφή του π χρειαζόμαστε περίπου 10^q δεκαδικά ψηφία του π, οπότε τότε ο $[10^{10^q}]\pi$ θα διαφέρει από τον φυσικό αριθμό $[10^{10^q}\pi]$ κατά 10^{-q} και επομένως κάποιο από τα $|\cos 10^{10^q}|, |\cos 10^{(1+10^q)}|, |\cos 10^{(2+10^q)}|, \ldots, |\cos 10^{10^{(q+1)}}|$ θα είναι μεγαλύτερο από $1-10^{-2q}/2$.

Αν λοιπόν είναι έτσι τα πράγματα για τον π τότε καθώς το q θα μεγαλώνει το συνημίτονο θα πλησιάζει οσοδήποτε στη μονάδα. [1]

Όλα αυτά όμως είναι εικασίες, αφού δεν γνωρίζουμε πλήρως τη συχνότητα που εμφανίζονται τα 0 στον π σε οποιαδήποτε τάξη. Για παράδειγμα αν στον π δεν εμφανίζονται ποτέ παραπάνω από, ας υποθέσουμε, 50 συνεχόμενα μηδενικά τότε η προσέγγιση στη μονάδα του συνημιτόνου δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από κάποια ελάχιστη τιμή (συγκεκριμένα από 10^{-50}) και τότε το sup των $|\cos 10^q|$ θα είναι κάποιος αριθμός μικρότερος από τη μονάδα!

Όμως, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, μπορούμε τελικά να βρούμε φυσικό αριθμό για τον οποίο το $|\cos n|$ να πλησιάζει οσοδήποτε θέλουμε τη μονάδα. Η απόδειξη ακολουθεί το επιχείρημα των θυρίδων (όπως λέγεται) [pigeon-hole argument]: Έστω ένας φυσικός αριθμός n. Τότε αυτός μπορεί να γραφεί ως $m_n\pi + \upsilon_n$, όπου m_n κάποιος επίσης φυσικός αριθμός και υ_n το υπόλοιπο της διαίρεσης με $0 < \upsilon_n < \pi$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε n αντιστοιχεί ένα μοναδικό υπόλοιπο υ_n, καθόσον αν για δυο διαφορετικούς $n_1 \neq n_2$ ήταν $\upsilon_{n_1} = \upsilon_{n_2}$ αυτό θα σήμαινε ότι ο φυσικός $n_1 - n_2$ θα ήταν πολλαπλάσιο του π, γεγονός το οποίο θα καθιστούσε τον π ρητό. Τώρα χωρίζουμε τον π σε 10^q ισομήκη διαστήματα και κατασκευάζουμε τα υπόλοιπα των αριθμών $n, 2n, 3n, \ldots, 10^q n, (10^q+1)n$, $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots, \upsilon_{10^q}$. Όλα αυτά τα διαφορετικά μεταξύ τους υπόλοιπα θα βρίσκονται με κάποιο τρόπο κατανεμημένα εντός των $10^q - 1$ προαναφερθέντων διαστημάτων και επόμένως τουλάχιστον δύο από αυτά τα υπόλοιπα, ας πούμε τα υ_s, υ_r θα βρίσκονται εντός του ίδιου διαστήματος. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά $r - s$ θα απέχει από κάποιο πολλαπλάσιο του π (συγκεκριμένα το $(m_r - m_s)\pi$) $\upsilon_r - \upsilon_s$ δηλαδή λιγότερο από $\pi/10^q$. Συνεπώς όποιο και αν είναι το q, υπάρχει πάντα φυσικός αριθμός με $|\cos n| > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10^q}\right)^2$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $\sup\{|\cos n|, n \in \mathbf{N}\} = 1$.

Επομένως ποιο είναι το συμπέρασμα αναφορικά με το αν υπάρχουν οσαδήποτε συνεχόμενα μηδενικά στη γραφή του π; Στο ερώτημα αυτό δεν μπορούμε να απαντήσουμε με βεβαιότητα γιατί όπως θυμάστε η εικασία αυτή θα ήταν ορθή αν ίσχυε ότι $\sup\{|\cos[10^p\pi]|, p \in \mathbf{N}\} = 1$,. Όμως εμείς δεν δείξαμε προηγουμένως αυτό. Μήπως όμως η απάντηση όσον αφορά το supremum μπορεί να μας πει κάτι παρόμοιο με την επανάληψη οσονδήποτε μηδενικών (ή του 2^q ή 5^q για οσοδήπτε μεγάλο q, σύμφωνα με την υποσημείωση παραπάνω) στη γραφή του π;

Έστω ότι στη δεκαδική γραφή του π συναντάμε κάποιο μοτίβο από p αριθμούς τους $b_1, b_2, \ldots, b_p$ να επαναλαμβάνεται συνεχόμενα (χωρίς άλλες παρεμβολές) $q > 1$ φορές. Αυτό σημαίνει ότι ο φυσικός αριθμός n_1 που αποτελείται από όλα τα δεκαδικα ψηφία του π (χωρίς την υποδιαστολή) μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά το μοτίβο διαφέρει από το αντίστοιχο πολλαπλάσιο του π με μια κατάλληλη δύναμη του 10 κατά τον αριθμό

$$n_1 - 10^\lambda \pi = 0,\underbrace{b_1 b_2 \ldots b_p b_1 b_2 \ldots b_p \ldots\ldots b_1 b_2 \ldots b_p}_{q\text{επαναλήψεις}} + \epsilon$$

[1] Χωρίς να θέλουμε να περιπλέξουμε περισσότερο τα πράγματα αξίζει να σημειώσουμε ότι ο περιορισμός της επιλογής ο n να πλησιάζει το πολλαπλάσιο, υπό μορφή δύναμης του 10, του π: $[10^{10^q}\pi]$ και όχι ένα οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο του π δεν είναι τόσο παράλογος αφού για να καταφέρει ο ζητούμενος φυσικός αριθμός n να προσεγγίσει ακόμη περισσότερο ένα άλλης μορφής πολλαπλάσιο του π, για παράδειγμα το $\{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\}\pi$ (όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ τα δεκαδικά ψηφία του νέου φυσικού αριθμού), θα πρέπει ο π να εμπεριέχει κάποια σειρά από δεκαδικά ψηφία της μορφής 2^q ή 5^q έτσι ώστε πολλαπλασιάζοντας τον π με κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε η ιδιαίτερη αυτή σειρά των δεκαδικών ψηφίων του π να "μετακινηθεί" σε κατάλληλη μετά την υποδιαστολή θέση και επιπλέον με επιπλέον πολλαπλασιασμό με τον αριθμό 5^q ή 2^q, αντιστοίχως, το πολλαπλάσιο αυτό του π θα απέχει από κατάλληλο φυσικό αριθμό κατά λιγότερο από 10^{-10^q} (το πολλαπλάσιο αυτό του π θα έχει q συνεχόμενα μηδενικά αμέσως μετά την υποδιαστολή). Βρισκόμαστε λοιπόν πάλι στις ίδιες συνθήκες όπως και στο κυρίως κείμενο. Η απαίτηση, όμως, ο π να εμπεριέχει στη δεκαδική του μορφή αυτούσια κάποια δύναμη της μορφής 2^q ή 5^q δεν είναι λιγότερο απαιτητική από το να εμπεριέχει q συνεχόμενα μηδενικά.

όπου $\epsilon < 10^{-qp}$. Τότε

$$n_1 - 10^\lambda \boldsymbol{\pi} = B(1 + 10^{-p} + 10^{-2p} + \ldots + 10^{-qp}) + \epsilon$$

όπου $B = b_1 b_2 \ldots b_p$ φυσικός αριθμός μικρότερος του 10^p. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
n_1 - 10^\lambda \boldsymbol{\pi} &= \frac{1 - 10^{-p(q+1)}}{1 - 10^{-p}} + \epsilon \\
&= B\frac{10^p - 10^{-pq}}{10^p - 1} + \epsilon \\
&= B\frac{10^p - 10^{-pq}}{\underbrace{99\ldots}_{p}} + \epsilon \\
&\Rightarrow \underbrace{99\ldots}_{p} n_1 - \underbrace{99\ldots}_{p} 10^\lambda \boldsymbol{\pi} = B(10^p - 10^{-pq}) + \epsilon \\
&\Rightarrow (\underbrace{99\ldots}_{p} n_1 - B10^p) - \underbrace{99\ldots}_{p} 10^\lambda \boldsymbol{\pi} = -B10^{-pq} + \epsilon. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Το δεξί μέλος είναι αριθμός μικρότερος κατ' απόλυτη τιμή του $10^{p(1-q)}$ ενώ το αριστερό σκέλος είναι ένας φυσικός αριθμός (εντός της παρένθεσης) - ένα πολλαπλάσιο του π. Η απαίτηση λοιπόν να μπορεί η απόλυτη τιμή του συνημιτόνου ενός φυσικού αριθμού να προσεγγίσει οσοδήποτε τη μονάδα ε(που αποδείχθηκε προηγουμένως) είναι ισοδύναμη με το να υπάρχει κάποιο μοτίβο στον π που να μπορεί να επαναλαμβάνεται οσεσδήποτε φορές!

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εμφάνιση διαφόρων ψηφίων στον π βλ. την ιστοσελίδα: http://mathoverflow.net/questions/62868/what-is-the-longest-known-sequence-of-consecutive -zeros-in-pi