



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση I

6 Φεβρουαρίου 2013

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

ΘΕΜΑ Ε

1. Για τη δεδομένη συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης σε όλο το $\mathbb{R}$, το υπόλοιπο παίρνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (χωρίς περιορισμό) τη μορφή:

$$R_n(f, a, x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)),$$

όπου το θ λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και εξαρτάται από τα a, x και n .

2. Η σειρά Taylor συγκλίνει στη συνάρτηση αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, a, x) = 0$.
3. Εφόσον είναι παραγωγίσιμη είναι συνεχής. Μάλιστα επειδή έχει παραγώγους κάθε τάξης, όλες οι παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις.
4. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $|x| \leq R$ είναι φραγμένη. Επειδή για κάθε θετικό ακέραιο j η συνάρτηση $f^{(j)}(x)$ είναι συνεχής στο $|x| \leq R$ θα είναι $|f^{(j)}(x)| \leq M_j$, όπου η τιμή του φράγματος M_j εξαρτάται γενικά από την τάξη της παραγώγου j και το πλάτος του διαστήματος R .
5. Στην ειδική περίπτωση επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f''(x) = f(x)$ θα ισχύει για κάθε n ότι $f^{(n+2)}(x) = f^{(n)}(x)$. Συνεπώς στο διάστημα $|x| \leq R$ αν το φράγμα της $f(x)$ είναι M_0 και της $f'(x)$ είναι M_1 , όλες οι περιττές τάξεις παράγωγοι θα φράσσονται σε αυτό το διάστημα από το M_1 και οι άρτιες τάξεις παράγωγοι από το M_0 . Συνεπώς, αν M είναι ο μεγαλύτερος των M_0 και M_1 , τότε αποδείξαμε ότι:

$$|f^{(j)}(x)| \leq M$$

για κάθε τιμή του j και $|x| \leq R$.

6. Στη περίπτωση μας το υπόλοιπο για $|x|, |a| < R/2$ και για κάθε τιμή του R ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|R_n(f, a, x)| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \right| \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Επειδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, a, x) = 0$, διότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} M = 0,$$

η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ για κάθε x δίνεται από τη σειρά Taylor με $\alpha = 0$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots.$$

Επειδή μας έχει δοθεί ότι $f(0) = f^{(2n)}(0) = 1$ και $f'(0) = f^{(2n-1)}(0) = 0$, θα είναι:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

7. Είναι

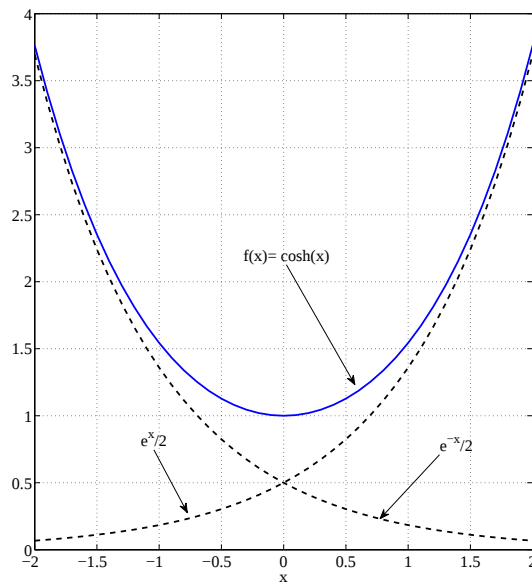
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

και

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Συνεπώς

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $f(x)$.