Νικόλαος Παπαδάτος

Ανάλυση Εργασιών

(α) Διδακτορική Διατριβή

[0] Συμβολή στη θεωρία διατεταγμένων δειγμάτων και στην προσέγγιση κατανομών. Η διατριβή χωρίζεται νοηματικά σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος (πρώτο, δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο) μελετώνται ιδιότητες των διατεταγμένων δειγμάτων, ενώ το δεύτερο μέρος (τέταρτο, πέμπτο και έκτο κεφάλαιο) ασχολείται με την εύρεση φραγμάτων για την απόσταση ολικής κύμανσης δυο κατανομών πιθανότητας.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο ορίζονται και μελετώνται οι *ενδιάμεσες διατεταγμένες παρατηρήσεις* και αποδεικνύεται (βλ. Εργ. [1]) ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μη-παραμετρικές εκτιμήτριες των πληθυσμιακών ποσοστημορίων. Στο δεύτερο κεφάλαιο βρίσκονται φράγματα διασποράς για τις διατεταγμένες παρατηρήσεις, χρησιμοποιώντας μια μέθοδο των Cacoullos and Papathanasiou (1985), *Statist. Probab. Lett.*, **3**, 175–184, αφορούσα φράγματα διασποράς συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών (Εργ. [5]). Στο τρίτο κεφάλαιο βρίσκεται το ελάχιστο μη παραμετρικό (ανεξάρτητο κατανομής) άνω φράγμα διασποράς μιας διατεταγμένης παρατήρησης, για δεδομένη πληθυσμιακή διασπορά (Εργ. [2]).

Το δεύτερο μέρος της διατριβής ασχολείται με την εύρεση φραγμάτων για την απόσταση ολικής κύμανσης δυο κατανομών (μέτρων) πιθανότητας. Αναλυτικότερα, στο πέμπτο κεφάλαιο εξάγονται φράγματα ολικής κύμανσης για τις οριακές κατανομές των ακραίων παρατηρήσεων (extreme value distributions). Στο πέμπτο κεφάλαιο τα αποτελέσματα γενικεύοντα σε οποιεσδήποτε κατανομές, και αποδεικνύεται μια πληροφοριακή ανισότητα της μορφής

$$d_{TV}(X,Y) \le c_Y \, \mathbb{E}\left|\frac{f'(X)}{f(X)} - \frac{g'(X)}{g(X)}\right|,$$

όπου f, g είναι οι πυκνότητες των X, Y, και c_Y μια σταθερά εξαρτώμενη μόνο απο την τ.μ. Y (βλ. Εργ. [4]). Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο μελετάται το ίδιο πρόβλημα από διαφορετική σκοπιά και εξάγονται άνω φράγματα μέσω των συναρτήσεων w_X και w_Y (που εμφανίζονται στα φράγματα διασποράς και χαρακτηρίζουν τις αντίστοχες κατανομές των X, Y). Τα φράγματα αυτά αποδεικνύονται πιο εύχρηστα και πιο ακριβή από τα πληροφοριακά τους ανάλογα (του πέμπτου κεφαλαίου, βλ. Εργ. [3]).

(α) Επιστημονικές Δημοσιεύσεις

(i) Άρθρα Δημοσιευμένα / Δεκτά προς δημοσίευση σε Διεθνή Περιοδικά

[1] Intermediate order statistics with applications to nonparametric estimation. Στην εργασία αυτή (βλ. και [0], κεφ. 1) ορίζονται οι *ενδιάμεσες* διατεταγμένες παρατηρήσεις, ο οποίες κατασκευάζονται με μια μέθοδο εμφύτευσης μέσα στο τυχαίο δείγμα. Αποδεικνύεται ότι μπορούν να παραχθούν (κατά προσέγγιση) με βάση τις συνήθεις (ακριβείς) παρατηρήσεις του δείγματος, και μάλιστα, φαίνεται πως έχουν αρκετά ικανοποιητικές ιδιότητες, ως εκτιμήτριες των πληθυσμιακών ποσοστημορίων.

[2] Maximum variance of order statistics.
Για δοθείσα πληθυσμιακή διασπορά $\sigma^2 > 0$, αποδεικνύεται ότι η διασπορά της τυποποιημένης διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}/\sigma$ δεν μπορεί να υπερβεί μια απόλυτη σταθερή τιμή $c_{i:n}$. Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται με βάση την ταυτότητα Hoeffding.

[3] Distance in variation between two arbitrary distributions via the associated w-functions.
Το βασικό αποτέλεσμα των Cacoullos, Papathanasiou and Utev (1994), *Ann. Probab.*, **22**, 1607–1618, επεκτείνεται δίδοντας άνω φράγμα για την απόσταση ολικής κύμανσης δυο απόλυτα συνεχών τ.μ. X και Y. Η βασική ανισότητα έχει την μορφή (όταν οι πρώτες δυο ροπές ταυτίζονται)

$$d_{TV}(X,Y) \le c_Y \mathbb{E}\left|1 - \frac{w_X(X)}{w_Y(X)}\right|,$$

όπου w_X και w_Y οι (μη-αρνητικές) συναρτήσεις που εμφανίζονται στα φράγματα διασποράς (βλ. και [0], κεφ. 6). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι Cacoullos, Papathanasiou and Utev απέδείξαν αυτό το αποτέλεσμα μόνο για κανονική τ.μ. Y. Το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται τόσο στην διακριτή περίπτωση, όσο και στην περίπτωση που η τ.μ. X προκύπτει ως άθροισμα εξαρτημένων τ.μ. Επίσης δίδονται κάποιες εφαρμογές στις οποίες εξετάζεται η τάξη σύγκλισης ακολουθίας τ.μ. προς την οριακή κατανομή.

[4] Distance in variation and a Fisher-type information.
Εδώ εξάγεται ένα πληροφοριακό άνω φράγμα για την απόσταση ολικής κύμανσης δυο απόλυτα συνεχών τ.μ. (βλ. και [0], κεφ. 4). Επίσης επεκτείνεται και στην διακριτή περίπτωση. Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της βασικής ανισότητας απλοποιεί ένα αποτέλεσμα του Barron (1986), *Ann. Probab.*, **14**, 336–342, που αφορά στην απόδειξη ενός ισχυρού Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (L^1 σύγκλιση των πυκνοτήτων) μέσω εντροπίας. Άλλες εφαρμογές αφορούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μεγίστου (και ελαχίστου) από τυχαία δείγματα.

[5] A generalization of variance bounds.
Δίδονται άνω και κάτω φράγματα διασποράς εκπεφρασμένα μέσω της *density–quantile* συνάρτησης $f(F^{-1}(\cdot))$. Μια εφαρμογή των ανισοτήτων αυτών δίδει μια άμεση απόδειξη της γνωστής ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της διασποράς των διατεταγμένων παρατηρήσεων.

[6] A note on maximum variance of order statistics from symmetric populations.
Αποδεικνύεται ένα αποτέλεσμα ανάλογο με αυτό της Εργ. [2], όταν είναι επιπροσθέτως γνωστό ότι ο πληθυσμός είναι συμμετρικός. Με την υπόθεση της συμμετρίας έχουμε σημαντική βελτίωση των φραγμάτων, εν σχέσει με αυτά της γενικής περίπτωσης.

[7] Exact bounds for the expectations of order statistics from non-negative populations.
Βρίσκονται τα βέλτιστα μη-παραμετρικά (ανεξάρτητα κατανομής) φράγματα για την αναμενόμενη τιμή των διατεταγμένων παρατηρήσεων, για δοθείσα πληθυσμιακή μέση τιμή

ενός μη-αρνητικού πληθυσμού. Ανάλογα βέλτιστα φράγματα εξάγονται και για τις διαφορές δυο διατεταγμένων παρατηρήσεων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πράξη (π.χ. στην Θεωρία Αξιοπιστίας) οι υπό μελέτη πληθυσμοί αποτελούνται συνήθως από μη-αρνητικές μονάδες, και επομένως, οι ανωτέρω υποθέσεις δεν είναι περιοριστικές. Άμεση συνέπεια της παρατήρησης ότι τα φράγματα αυτά *δεν εξαρτώνται από την πληθυσμιακή διασπορά* είναι το γεγονός ότι έχουμε αξιοσημείωτες βελτιώσεις σε παλαιότερα κλασικά αποτελέσματα των Hartley–David–Gumbel (1954), *Ann. Math. Statist.*, **25**, 85–99, 75–84, και Moriguti (1953), *Ann. Math. Statist.*, **24**, 107–113.

[8] Variance inequalities for covariance kernels and applications to central limit theorems.
Εδώ αποδεικνύεται μια 'συνελιξιακή' ανισότητα για το τυποποιημένο άθροισμα ανεξαρτήτων απόλυτα συνεχών τ.μ. Με βάση την ανισότητα αυτή (που ισχύει με την προϋπόθεση ότι το στήριγμα (support) των τ.μ. είναι διάστημα), αποδεικνύεται ότι η τάξη σύγκλισης (κατά ολική κύμανση) των τυποποιημένων μερικών αθροισμάτων $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ (των ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X, X_1, X_2, \ldots$) προς την τυποποιημένη κανονική Z είναι τουλάχιστον $O(n^{-1/2})$, και μάλιστα δίδεται εκπεφρασμένη τιμή της σταθεράς c_X για την οποία

$$d_{TV}((S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}), Z) \le c_X/\sqrt{n}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται εύκολα στην πολυδιάστατη περίπτωση.

[9] Total variation distance and generalized covariance kernels.
Εδώ επιχειρείται μια επέκταση της μεθόδου της Εργ. [3], έτσι ώστε να προκύψουν άνω φράγματα για την απόσταση ολικής κύμανσης μέσω μιας νέας συνάρτησης $Z_f(\cdot; h(\cdot))$ (f η πυκνότητα της X και $h(\cdot)$ αυθαίρετη συνάρτηση), που ονομάζεται γενικευμένος πυρήνας συνδιακύμανσης (για τη συνάρτηση $h(x) = x$ έχουμε $Z_f(\cdot; x) = w_X(\cdot)$, και τα αποτελέσματα ανάγονται στα ήδη γνωστά της Εργ. [3]). Το τυπικό φράγμα είναι της μορφής (όταν η συνάρτηση h είνα γνησίως αύξουσα)

$$d_{TV}(X, Y) \le c_Y \mathbb{E}\left|1 - \frac{Z_f(X; h)}{Z_g(X; h)}\right|,$$

όπου η σταθερά c_Y εξαρτάται μόνο από την τ.μ. Y. Ένα πλεονέκτημα της γενικευμένης αυτής μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι με κατάλληλη επιλογή της h (δηλ. για $h = -g'/g$, όπου g η πυκνότητα της τ.μ. Y), μπορεί να αποδειχθεί ένας χαρακτηρισμός της σύγκλισης κατά ολική κύμανση, σύμφωνα με τον οποίον

$$d_{TV}(X_n, Y) \to 0 \text{ αν και μόνον αν } Z_{f_n}(X_n; -g'/g) \to 1 \text{ κατά πιθανότητα.}$$

[10] Variational inequalities for arbitrary multivariate distributions.
Παρουσιάζονται φράγματα της απόστασης ολικής κύμανσης δυο πολυδιαστάτων τυχαίων διανυσμάτων, ανάλογα με αυτά της Εργ. [3]. Τα αποτελέσματα αυτά επεκτείνουν μια μέθοδο του Papathanasiou (1996), *J. Multivariate Anal.*, **58**, 189–196, που αφορούσε την σύγκλιση στην πολυδιάστατη κανονική. Οι πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές (εκτός, ίσως,

της σύγκλισης προς την πολυδιάστατη κανονική) φαίνεται πως εμφανίζονται στην διακριτή περίπτωση, όταν η 'οριακή' κατανομή έχει ανεξάρτητες συνιστώσες. Για παράδειγμα, μπορεί με άμεση χρήση των εν λόγω φραγμάτων, να διαπιστωθεί η σύγκλιση (κατά ολική κύμανση) της Πολυωνυμικής και της Αρνητικής Πολυωνυμικής προς την πολυδιάστατη Poisson (με ανεξάρτητες συνιστώσες), και να μελετηθεί η τάξη σύγκλισης.

[11] Upper bound for the covariance of extreme order statistics from a sample of size three.
Με χρήση των ορθογωνίων πολυωνύμων του Legendre στο $[0, 1]$, αποδεικνύεται ότι για τις διατεταγμένες παρατηρήσεις $X_{1:3} \le X_{2:3} \le X_{3:3}$, από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 3$ προερχόμενο από τυχούσα συνάρτηση κατανομής με μέσο μ και διασπορά σ^2, ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{Cov}[X_{1:3}, X_{3:3}] \le \frac{6}{a^2}\sigma^2,$$

όπου $a \simeq 0.16838$ είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $\tanh(a/2) = a/6$, και η ισότητα χαρακτηρίζει την κατανομή *υπερβολικού ημιτόνου* με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1/a}{\sqrt{(x-\mu)^2 + \lambda^2\sigma^2}}, \text{ για } |x - \mu| < a\sigma\sqrt{\frac{2}{a^2 - 24}},$$

όπου $\lambda = \sqrt{2(36 - a^2)/(a^2 - 24)} \simeq 0.25089$.
[Σημειώνουμε ότι ο χαρακτηρισμός αυτός (καθώς και αρκετά άλλα αποτελέσματα αυτού του τύπου) μπορούν να προκύψουν και από την εφαρμογή κάποιων γνωστών αποτελεσμάτων από την Θεωρία Γραμμικών Ολοκληρωτικών Τελεστών].

[12] Expectation bounds on linear estimators from dependent samples.
Θεωρούμε ένα δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από αυθαίρετες τ.μ. (πιθανώς εξαρτημένες και με διαφορετικές κατανομές), και έστω $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα. Υποθέτοντας ότι το αρχικό δείγμα έχει πεπερασμένες ροπές δευτέρας ταξεως, δηλ. $\mu_i = \mathbb{E}X_i$ και $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}X_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, αποδεικνύεται ότι για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbb{E}X_{i:n} - \overline{\mu}) \le \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{c})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n}\left\{(\mu_i - \overline{\mu})^2 + \sigma_i^2\right\} - n\mathrm{Var}\overline{X}\right)^{1/2},$$

όπου $\overline{\mu} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$, $\overline{c} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}c_i$, $\overline{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ και $(a_1, a_2, \ldots, a_n)'$ είναι η l^2-προβολή του διανύσματος $(c_1, c_2, \ldots, c_n)'$ επί του κυρτού κώνου των κατά συντεταγμένη αυξουσών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ (ειδικότερα, $a_i = c_i$ για κάθε i όταν και μόνο όταν η πεπερασμένη ακολουθία c_i είνα αύξουσα ως προς i). Ισχύει επίσης ένα αντίστοιχο κάτω φράγμα.

Το φράγμα είναι βέλτιστο όταν οι X_i είναι ανταλλάξιμες. Επιπροσθέτως, αποτελεί ουσιαστική βελτίωση των φραγμάτων που είχαν προταθεί από τους Arnold and Groeneveld (1979), *Ann. Statist.*, **7**, 220–223, Aven (1985), *J. Appl. Probab.*, **22**, 723–728 και Lefèvre (1986), *Stochastic Anal. Appl.*, **4**, 351-356, όπως γίνεται φανερό από τις εφαρμογές του.

[13] Distribution and expectation bounds on order statistics from possibly dependent variates.
Εδώ ορίζεται μια νέα μορφή εξάρτησης των μεταβλητών ενός τυχαίου διανύσματος, χρήσιμη κυρίως σε συστήματα αξιοπιστίας. Συγκεκριμένα, ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)'$ καλείται *Μεγιστικά Αναλλοίωτο τάξεως* j (Maximally Stable of order j ή MAS(j) για συντομία), όταν η κατανομή $F_{(j)}$ του $\max\{X_{k_1},\ldots,X_{k_j}\}$ είναι αναλλοίωτη (σταθερή) ως προς οποιοδήποτε υποσύνολο $\{k_1,\ldots,k_j\}\subseteq\{1,\ldots,n\}$ μεγέθους j. Για παράδειγμα, όλα τα n-διάστατα διανύσματα είναι MAS(n), αλλά τα διανύσματα που είναι MAS(1) είναι ακριβώς εκείνα που έχουν την ίδια περιθώρια συνάρτηση κατανομής $F_{(1)}$ (δηλ. τα διανύσματα με ισόνομες συνιστώσες). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα ανταλλάξιμα διανύσματα είναι MAS(j) για κάθε $j=1,\ldots,n$.

Αν $X_{k:n}$ είνα η k τάξεως διατεταγμένη παρατήρηση από ένα MAS(j) διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ και $F_{k:n}$ η συνάρτηση κατανομής της, τότε για $k\geq j$ αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$F_{k:n}(x)\leq\min\left\{1,\frac{(n)_j}{(k)_j}F_{(j)}(x)\right\}\ \text{και}\ \mathbb{E}X_{k:n}\geq\frac{1}{a}\int_0^a F_{(j)}^{-1}(u)\mathrm{d}u,$$

όπου $a=(k)_j/(n)_j$, $(c)_j=c(c-1)\cdots(c-j+1)$ και $F_{(j)}^{-1}(u)=\inf\{x:F_{(j)}(x)\geq u\}$, $0<u<1$, η (αριστερά συνεχής) αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής $F_{(j)}$. Η ισότητα στα παραπάνω φράγματα επιτυγχάνεται για οποιεσδήποτε τιμές των j, k και n, και για οποιαδήποτε δοθείσα συνάρτηση κατανομής $F_{(j)}$. Ανάλογα αποτελέσματα δίδονται και για την περίπτωση *Ελαχιστικά Αναλλοίωτων διανυσμάτων τάξεως* j (Minimally Stable of order j, MIS(j)). Σημειώνεται ότι τα ανωτέρω φράγματα για MAS(j) και MIS(j) τυχαία διανύσματα βρίσκουν εφαρμογή σε συστήματα αξιοπιστίας (στα οποία τα εξαρτήματα δεν απαιτείται να είναι κατ΄ ανάγκην ανεξάρτητα ούτε ισόνομα, απλώς πρέπει να ικανοποιούν κάποια MAS(j) ή MIS(j) συνθήκη), αφού οι ποσότητες $1-F_{k:n}$ και $\mathbb{E}X_{k:n}$ παριστάνουν την αξιοπιστία και τον μέσο χρόνο ζωής ενός k-out-of-n συστήματος, αντίστοχα, η δε συνθήκη MAS(j) μπορεί να ερμηνευτεί ως `Παράλληλη Ευστάθεια τάξεως j των εξαρτημάτων΄.

[14] An application of a density transform and the local limit theorem.
Κατ΄ αρχήν δίδεται μια γενίκευση της Εργ. [3], στην οποία αποδεικνύεται ότι η απόσταση ολικής κύμανσης δυο τ.μ. X και Y, με πυκνότητες f, g, μέσους μ, m, και διασπορές σ^2, s^2, επιδέχεται το φράγμα

$$d_{TV}(X,Y)\leq 2\int\left|f(x)-\frac{\sigma^2 g(x)}{s^2 g^*(x)}f^*(x)\right|dx+c_Y|\mu-m|,$$

όπου f^*, g^*, είναι οι πυκνότητες των X^* και Y^* (βλ. Εργ. [21]), και η σταθερά c_Y μπορεί να εκλεγεί ως $c_Y=2/\mathbb{E}|Y-m|$. Στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση κατά την οποία η $Y=Z$ είνα τυποποιημένη κανονική και $\sigma=s$, το άνω φράγμα γίνεται

$$d_{TV}((X-\mu)/\sigma,Z)\leq 3d_{TV}(X,X^*)+\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{2}}|\mu-m|,$$

και αποδεικνύεται ότι για μια ακολουθία απόλυτα συνεχών τ.μ. X_n με μέσους $\mu_n \to \mu$ και διασπορές $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$,

$$d_{TV}((X_n - \mu)/\sigma, Z) \to 0 \text{ όταν και μόνο όταν } d_{TV}(X_n, X_n^*) \to 0.$$

Με βάση το αποτέλεσμα αυτό και την 'συνελιξιακή' ταυτότητα της Εργ. [21], δίδεται μια πολύ απλή απόδειξη του Τοπικού Οριακού Θεωρήματος του Prohorov (1952), *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, **83**, 797-800 (in Russian), στην πλήρη γενικότητά του, ξεπερνώντας την απαίτηση όπως οι αρχικές τ.μ. X_j έχουν για στήριγμα κάποιο διάστημα των πραγματικών αριθμών. Σημειώνουμε ότι τις τελευταίες δεκαετίες, τουλάχιστον τρεις διαφορετικές αποδείξεις του Θεωρήματος του Prohorov έχουν δοθεί (Barron (1986), *Ann. Probab.*, **14**, 336–342, Mayer–Wolf (1990), *Ann. Probab.*, **18**, 840–850, Cacoullos, Papathanasiou and Utev (1994), *Ann. Probab.*, **22**, 1607–1618), καμία όμως δεν αποδεικνύει το Θεώρημα στην πλήρη γενικότητά του.

[15] The use of spacings in the estimation of a scale parameter.
Οι άριστες γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήτριες (δηλ. αμερόληπτες εκτιμήτριες ελάχιστης διασποράς της μορφής $\sum_{i=1}^n c_i X_{i:n}$, όπου $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ το διατεταγμένο δείγμα) έχουν προταθεί από τον Lloyd (1952), *Biometrika*, **39**, 89–95, για την εκτίμηση των παραμέτρων θέσης και κλίμακος από μια οικογένεια θέσης-κλίμακος. Εδώ, χρησιμοποιώντας τα spacings $Z_i = X_{i+1:n} - X_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, βρίσκεται με απλούστερο τρόπο εναλλακτική (και αξιοσημείωτα απλούστερη) μορφή της εκτιμήτριας κλίμακος. Η απλούστερη αυτή μορφή μας επιτρέπει να απαντήσουμε θετικά (υπό κάποιες προϋποθέσεις) στο ερώτημα αν η εκτιμήτρια της παραμέτρου κλίμακος είναι μη αρνητική με πιθανότητα ένα, ερώτημα που μέχρι στιγμής δεν έχει απαντηθεί σε πλήρη γενικότητα. Τέλος, με ανάλογες τεχνικές βρίσκονται απλές μορφές των εκτιμητριών θέσης και κλίμακος από λογοκεκριμένα δείγματα προερχόμενα από την οικογένεια θέσης-κλίμακος την παραγόμενη από την ομοιόμορφη.

[16] Poisson approximation for a sum of dependent indicators: an alternative approach.
Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ καλούνται *Ολικά Αρνητικά Εξαρτημένες* (Totally Negatively Dependent, TND), όταν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οι τ.μ. X_i και $X^{(i)} = \sum_{j \ne i} X_j$ είναι Αρνητικά Τετραγωνικά Εξαρτημένες, δηλ. όταν $\mathrm{Cov}[f(X_i), g(X^{(i)})] \le 0$ για κάθε ζεύγος αυξουσών συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνδιακύμανση είναι πεπερασμένη. Υποθέτουμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι 0–1 δείκτριες με $\mathbb{E}X_i = p_i = \mathbb{P}[X_i = 1]$, και θέτουμε $W = \sum_{i=1}^n X_i$, $\mu = \mathbb{E}W$ και $\sigma^2 = \mathrm{Var}W$. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας είναι το εξής: Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είνα TND και η $\mathcal{P}_\lambda$ δηλώνει μια Poisson τ.μ. με μέσο $\lambda \ge \mu$, τότε

$$d_{TV}(W, \mathcal{P}_\lambda) \le (1 - e^{-\lambda}) \left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right) + \min\left\{1, \frac{(2/e)^{1/2}}{\lambda^{1/2}}\right\} (\lambda - \mu),$$

όπου $d_{TV}(X, Y)$ είναι η απόσταση ολικής κύμανσης των τυχαίων μεταβλητών X και Y. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει χρησιμοποιώντας μια εκλέπτυνση της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε στην Εργ. [14] για την κανονική κατανομή, και αποτελεί επέκταση ενός κλασικού αποτελέσματος της Προσέγγισης Poisson (βλ. Barbour, Holst and Janson (1992), *Poisson Approximation* (Oxford Studies Prob. **2**), Oxford University Press, Corollary 2.C.2), για TND 0–1 δείκτριες (σημειώνεται ότι το κλασικό αποτέλεσμα είχε αποδειχθεί για Αρνητικά Σχετιζόμενες (Negatively Related, NR) 0–1 δείκτριες, και ότι η κλάση των NR 0–1 δεικτριών είναι γνήσια μικρότερη αυτής των TND 0–1 δεικτριών).

Επίσης παρουσιάζεται μια εφαρμογή σε ένα γενικευμένο πρόβλημα γενεθλίων, και τέλος, εξετάζεται η σχέση μεταξύ διαφόρων κλάσεων αρνητικά εξαρτημένων τ.μ., οι οποίες είναι σχετικές με προβλήματα αυτού του είδους.

[17] Bounds on expectation of order statistics from a finite population.
Θεωρούμε ένα απλό τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$, το οποίο λαμβάνεται χωρίς επανάθεση (με απλή τυχαία δειγματοληψία) από έναν διατεταγμένο πληθυσμό $\Pi = \{x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_N\}$, και κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ (φυσικά, $n \le N$). Έστω $\mu = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i$ και $\sigma^2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$ ο μέσος και η διασπορά του πληθυσμού, αντίστοιχα. [Σημειώνεται ότι αν και οι τ.μ. του αρχικού δείγματος είναι ισόνομες με μέσο μ και διασπορά σ^2, δεν είναι προφανώς ανεξάρτητες (είναι απλώς ανταλλάξιμες).] Στην εργασία αυτή προσδιορίζονται τα βέλτιστα άνω και κάτω φράγματα για την $\mathbb{E}X_{i:n}$ και την $\mathbb{E}[X_{n:n} - X_{1:n}]$, και χαρακτηρίζονται οι πληθυσμοί που επιτυγχάνουν την ισότητα. Επίσης, αντίστοιχα φράγματα δίδονται για την συνδιακύμανση στην απλούστερη περίπτωση $n = 2$. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι, καθώς $N \to \infty$, τα εν λόγω φράγματα (καθώς και οι αντίστοχες συναρτήσεις κατανομής των πληθυσμών που επιτυγχάνουν τις ισότητες στα φράγματα) προσεγγίζουν τα ήδη γνωστά (κλασικά) αποτελέσματα για ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία δείγματα.

[18] Multivariate covariance identities with an application to order statistics.
Αποδεικνύονται κάποιες πολυδιάστατες ταυτότητες συνδιακύμανσης της μορφής

$$\mathrm{Cov}[h^j(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}[z^j(\boldsymbol{X})g_j(\boldsymbol{X})],\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ ένα απόλυτα συνεχές τυχαίο διάνυσμα, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση με μερικές παραγώγους $g_j(\boldsymbol{x}) = \partial g(\boldsymbol{x})/\partial x_j$, και $z^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση, η οποία ορίζεται με βάση την πυκνότητα του $\boldsymbol{X}$ και την δοθείσα συνάρτηση $h^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Με κατάλληλη εφαρμογή των ταυτοτήτων αυτών (οι οποίες γενικεύουν κάποιες προγεννέστερες των Cacoullos and Papathanasiou (1992), *J. Multivariate Anal.*, **43**, 173–184), επιτυγχάνεται ισχυροποίηση μιας ταυτότητας του Siegel (1993), *J. Amer. Statist. Assoc.*, **88**, 77–80, και επίσης δίδονται εφαρμογές σε διατεταγμένα δείγματα προερχόμενα από αυθαίρετη πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

[19] Bounds on expectations of L-statistics from without replacement samples.
Θεωρούμε ένα διατεταγμένο δείγμα $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$, προερχόμενο από πεπερασμένο διατεταγμένο πληθυσμό μεγέθους N χωρίς επανάθεση, όπως στην Εργ. [17], και έστω

$$L = L(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{i:n}$$

η γενική μορφή μιας γραμμικής εκτιμήτριας. Εφαρμόζοντας κατάλληλη μέθοδο προβολής, βρίσκονται άνω και κάτω φράγματα για την $\mathbb{E}L$, τα οποία τις περισσότερες φορές είναι βέλτιστα. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένου του περικεκομμένου μέσου (trimmed mean).

[20] Heteroscedastic one-way ANOVA and lack of fit tests.
Είναι γνωστό ότι στην Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα, η κατάλληλη στατιστική συνάρτηση $F = \mathrm{MST}/\mathrm{MSE}$ έχει ασυμπτωτικά, υπό την μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$, χ^2 κατανομή, με την προϋπόθεση ότι το πλήθος παρατηρήσεων ανά κελί τείνει στο άπειρο, το δε πλήθος κελιών, a, παραμένει σταθερό. Στην εργασία αυτή, αντίθετα, υποθέτουμε ότι το πλήθος κελιών, a, τείνει στο άπειρο, το δε πλήθος παρατηρήσεων ανά κελί παραμένει σταθερό (αυτή η θεώρηση των πραγμάτων βρίσκει εφαρμογές όχι μόνο σε πρακτικά προβλήματα, αλλά και σε μοντέλα στατιστικού ελέγχου καλής προσαρμογής (lack-of-fit tests) όπου, π.χ., η εκτιμώμενη συνάρτηση, αναγκαστικά πρέπει να εκτιμηθεί από σχετικά μικρό αριθμό παρατηρήσεων σε μικρές περιοχές του πεδίου ορισμού της, ακόμα και αν το δείγμα είνα μεγάλο). Εδώ εισάγεται μια νέα μέθοδος προβολής, με εφαρμογή της οποίας μελετάται εύκολα η ασυμπτωτική συμπεριφορά στατιστικών συναρτήσεων της μορφής $\sqrt{a}(\mathrm{MSE})(F-1) = \sqrt{a}(\mathrm{MST} - \mathrm{MSE})$, και αποδεικνύεται ότι, κάτω από γενικές συνθήκες, η οριακή κατανομή τους, καθώς $a \to \infty$, είναι κανονική. Η μέθοδος προβολής μας επιτρέπει να μελετήσουμε εξίσου εύκολα την ετεροσκεδαστική περίπτωση (όπου οι διασπορές ανά κελί μεταβάλλονται), καθώς επίσης και την μη ομοιογενή περίπτωση (unbalanced case), κατά την οποία μεταβάλλεται ο αριθμός παρατηρήσεων ανά κελί. Αντίστοιχα αποτελέσματα παίρνουμε και κάτω από κατάλληλες εναλλακτικές υποθέσεις, όπου και πάλι η ασυμπτωτική κανονικότητα λαμβάνει χώρα. Η ισχύς των ελέγχων καθώς και η ταχύτητα σύγκλισης εξετάζεται εμπειρικά (με προσομοιώσεις).

(ii) Άρθρα Δημοσιευμένα σε Διεθνείς Επιστημονικούς Τόμους (με κριτές)

[21] Three elementary proofs of the Central Limit Theorem with applications to random sums.
Στην εργασία αυτή (η οποία παρουσιάστηκε στο συνέδριο Conference in the Memory of Stamatis Cambanis, 18–19 December 1995 at Athens, Greece), αποδεικνύεται με τρεις στοιχειώδεις τρόπους το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, και παρουσιάζοντα ορισμένες εφαρμογές στην οριακή κατανομή τυχαίων αθροισμάτων (δηλ. αθροισμάτων N ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ., όπου το πλήθος N είναι τ.μ. με τιμές στους θετικούς ακεραίους).

[22] Unified variance bounds and a Stein-type identity.
Στην εργασία αυτή (η οποία παρουσιάστηκε στο συνέδριο Conference in honor of Professor Theophilos Cacoullos, 3–6 June 1999 at Athens, Greece), αποδεικνύεται ότι για τυχούσα απόλυτα συνεχή τ.μ. X με πυκνότητα f και πεπερασμένη διασπορά σ^2, υπάρχει μοναδική τ.μ. X^* (που μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματισμός της X), έτσι ώστε να ικανοποιείται η *γενικευμένη ταυτότητα Stein*

$$\mathrm{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X^*)]$$

για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με (σχεδόν παντού) παράγωγο g', με την προϋπόθεση ότι $\mathbb{E}|g'(X^*)| < \infty$. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού αυτού συζητώνται εκτενώς, και επιπλέον, αποδεικνύεται η σχέση του με τα άνω και κάτω φράγματα διασποράς, καθώς επίσης και το μονοσήμαντο του αντιστρόφου μετασχηματισμού. Επίσης αποδεικνύεται μια ενδιαφέρουσα `συνελιξιακή' ταυτότητα, η οποία στην περίπτωση ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ λαμβάνει την μορφή

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1^* + X_2 + \cdots + X_n.$$

[23] Characterizations of discrete distributions using the Rao-Rubin condition.
Στην εργασία αυτή, που παρουσιάστηκε στο συνέδριο 5th Lattice Path Combinatorics and Discrete Distributions, June 2002, Athens, Greece, παρουσιάζονται ορισμένοι χαρακτηρισμοί διακριτών κατανομών. Συγκεκριμένα, αν $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ είναι ένα διακριτό τυχαίο διάνυσμα με τιμές στο $\mathbb{N}^k$, και αν ικανοποιείται η συνθήκη μερικής ανεξαρτησίας των Rao και Rubin,

$$\mathbb{P}[N_2 = n_2 | N_1 = 0] = \mathbb{P}[N_2 = n_2], \; n_2 \in \mathbb{N},$$

τότε, χρησιμοποιώντας ένα λήμμα του Shanbhag (1977), *J. Appl. Probab.*, **14**, 640–646, αποδεικνύεται ότι κάτω από ορισμένες γενικές παραδοχές, η υπόθεση

$$\mathbb{P}[N_1 = n_1, N_2 = n_2 \ldots, N_k = n_k | N = n] = \frac{1}{c(n)} \prod_{j=1}^{k} a_j(n_j),$$

όπου $N = N_1 + \cdots + N_k$, και $c, a_1, \ldots, a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ αυθαίρετες ακολουθίες, συνεπάγεται ότι οι $N_1, N_2, \ldots, N_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομές συγκεκριμένης μορφής. Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος, δίδονται χαρακτηρισμοί της Poisson και της Αρνητικής Διωνυμικής, οι οποίοι είναι παραπλήσιοι με αυτούς των Rao and Srivastava (1979), *Sankhyā Ser. A*, **41**, 124–128.

[24] The q-factorial moments of discrete q-distributions and a characterization of the Euler distribution.
Έστω $0 < q < 1$ και $x \in \mathbb{R}$. Ο q-αριθμός του x ορίζεται από τη σχέση $[x]_q = (1 - q^x)/(1 - q)$, και κατ' αναλογία ορίζεται το q-παραγοντικό k-τάξης του x ως $[x]_{k,q} = [x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q$. Οι αριθμοί αυτοί συνδέονται με τις λεγόμενες q-κατανομές, οι οποίες εμφανίζονται στη μελέτη αθροισμάτων n ανεξαρτήτων 0–1 δεικτριών με διαφορετικές πιθανότητες επιτυχίας (q-διωνυμική κατανομή, η οποία για $n \to \infty$ συγκλίνει στην κατανομή Heine), καθώς και στη μελέτη του αριθμού των αποτυχιών ως την k επιτυχία (q-Pascal κατανομή, η οποία για $k \to \infty$ συγκλίνει στην κατανομή Euler). Στην εργασία αυτή ορίζονται οι k τάξεως q-παραγοντικές ροπές μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X με τιμές στο $\mathbb{N}$, και μελετάται η σχέση τους με τις συνήθεις παραγοντικές ροπές της X. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται στις q-κατανομές, για τις οποίες αποδεικνύεται ότι υπάρχουν πολύ απλές εκφράσεις, ανάλογες με αυτές των συνήθων k-τάξεως παραγοντικών ροπών που γνωρίζουμε για τις συνήθεις διακριτές κατανομές. Επιπροσθέτως αποδεικνύεται ένας χαρακτηρισμός, κατά τον οποίο, η σχέση $\mathbb{E}([X_\lambda]_{2,q}) = [\mathbb{E}([X_\lambda]_q)]^2$ για κάθε λ σε μια οικογένεια δυναμοσειράς X_λ χαρακτηρίζει την κατανομή Euler.

(iii) Έχουν σταλεί για δημοσίευση (Submitted)
[25] Linear estimation of location and scale parameters usign partial maxima.
Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών μεγίστων, $X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, που προέρχεται από μια ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F(x;\theta_1,\theta_2) = F_0((x-\theta_1)/\theta_2)$, και άγνωστες παραμέτρους θέσης ($\theta_1 \in \mathbb{R}$) και κλίμακος ($\theta_2 > 0$). Για την εκτίμηση των παραμέτρων μπορούμε, όπως και στα διατετεγμένα δείγματα, να βρούμε άριστες γραμμικές εκτιμήτριες (δηλ. αμερόληπτες και με ελάχιστη διασπορά) της μορφής $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{i:i}$, με την προϋπόθεση ότι η F_0 έχει πεπερασμένη ροπή δευτέρας τάξεως. Όμως, σε αντίθεση με τα κλασικά αποτελέσματα για διατεταγμένα δείγματα, η συνέπεια των εκτιμητριών αυτών δεν είναι προφανής, λόγω της μεγάλης απώλειας πληροφορίας. Έτσι, η εργασία εστιάζεται στην εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακος, και το κυρίως αποτέλεσμα της εργασίας παρέχει αρκετά γενικές συνθήκες έτσι ώστε η άριστη γραμμική εκτιμήτρια $T_2 = T_2^n$ να εκτιμάει συνεπώς το θ_2, δηλ. $T_2^n \to \theta_2$ κατά πιθανότητα, καθώς $n \to \infty$. Ενδεικτικά αναφέρουμε το εξής αποτέλεσμα: Αν η F_0 έχει πεπερασμένη ροπή δευτέρας τάξεως και λογαριθμοκοίλη πυκνότητα f_0 (ή λογαριθμοκυρτή πυκνότητα με κάτω φραγμένο στήριγμα), για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\omega-} \frac{f_0(x)}{(1-F_0(x))^{\gamma}(-\log(1-F_0(x))^{\delta}} = L \in (0,+\infty),$$

όπου $\omega = \omega(F_0) = \inf\{x : F_0(x) = 1\}$ το άνω πέρας του στηρίγματος της F_0 και γ, δ σταθερές με $(\gamma,\delta) \in (-\infty, 3/2) \times \{0\} \cup (1/2, 1] \times (0, +\infty)$, τότε υπάρχει σταθερά $C = C(F_0)$, τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}[T_2^n - \theta_2]^2 \le \frac{C}{\log n}.$$

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται για αρκετές οικογένειες θέσης κλίμακος που χρησιμοποιούνται στη στατιστική, π.χ. Κανονική, Εκθετική (Weibull), Logistic, Pareto, Δυναμοκατανομή Power distribution.

[26] The discrete Mohr and Noll inequality with applications to variance bounds.
Οι Mohr and Noll, (1952), *Math. Nachr.* **7**, 55–59, έδωσαν ενδιαφέρουσα επέκταση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, $(\int_a^b g(t)dt)^2 \le (b-a)\int_a^b (g'(t))^2 dt$, κατά την οποία εισάγονται οι παράγωγοι ανωτέρας τάξεως της g. Στο πρώτο μέρος της εργασίας αποδεικνύεται ότι ισχύει ανάλογη ανισότητα στη διακριτή περίπτωση, όταν οι παράγωγοι αντικατασταθούν με προς τα εμπρός διαφορές. Με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αυτής, βρίσκονται άνω και κάτω φράγματα διασποράς για τυχούσα συνάρτηση $g(X)$, διακριτής τυχαίας μεταβλητής X με ακέραιες τιμές. Τα μάλλον πολύπλοκα φράγματα της γενικής περίπτωσης επιδέχονται απλούστερη μορφή όταν η τυχαία μεταβλητή X ανήκει στην οικογένεια των διακριτών κατανομών Pearson. Σε αυτήν την περίπτωση, το τυπικό φράγμα είναι της μορφής

$$(-1)^n \operatorname{Var} g(X) \le (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!\prod_{j=0}^{k}(1-j\delta)} \mathbb{E}[q^{[k+1]}(X)(g^{(k+1)}(X))^2],$$

όπου $q^{[k+1]}(x) = q(x)q(x+1)\ldots q(x+k)$, $g^{(k+1)}$ η προς τα εμπρός διαφορά, τάξεως $k+1$, της g, και $q(x) = \delta x^2 + \beta x + \gamma$ το χαρακτηριστικό τριώνυμο της συνάρτησης πιθανότητας p, που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\sum_{j \le k} (\mu - j)p(j) = p(k)q(k), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (\mu = \mathbb{E}X).$$

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετάται μια άλλη κατηγορία κάτω φραγμάτων διασποράς, για συνεχείς και διακριτές τυχαίες μεταβλητές Pearson. Τα φράγματα στηρίζονται στα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα P_k που παράγονται με τον τύπο Rodrigues,

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{p(x)} \Delta^k [q^{[k]}(x-k)p(x-k)], \quad \acute{\eta} \quad P_k(x) = \frac{(-1)^k}{f(x)} \frac{d^k}{dx^k} [q^k(x) f(x)],$$

για διακριτή (με συνάρτηση πιθανότητας p) και για συνεχή (με πυκνότητα f) τυχαία μεταβλητή Pearson, αντίστοιχα. Κατ΄ αρχήν αποδεικνύεται ένας τύπος αντιστροφής των ορθογωνίων πολυωνύμων, που για τη συνεχή περίπτωση λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} q^k(x) f(x) &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^{k-1} P_k(y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x}^{+\infty} (y-x)^{k-1} P_k(y) f(y) dy, \end{aligned}$$

και, ανάλογη μορφή υπάρχει για τη διακριτή περίπτωση. Με τη βοήθεια των τύπων αντιστροφής, η παρακάτω ταυτότητα συνδιακύμανσης επιτρέπει να εκφράσουμε τους συντελεστές Fourier οποιασδήποτε συνάρτησης g συναρτήσει των αντιστοίχων παραγώγων / διαφορών ανωτέρας τάξεως, ως εξής:

$$\mathbb{E}[P_k(X)g(X)] = \mathbb{E}[q^k(X) g^{(k)}(X)], \quad \acute{\eta} \quad \mathbb{E}[P_k(X)g(X)] = \mathbb{E}[q^{[k]}(X) g^{(k)}(X)],$$

με την προϋπόθεση ότι η X έχει πεπερασμένη ροπή $2k$ τάξεως και η g είναι τέτοια ώστε τα δεξιά μέλη να είναι πεπερασμένα. Το κάτω φράγμα διασποράς λαμβάνει τότε τη μορφή

$$\mathrm{Var}\, g(X) \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}^2[q^k(X) g^{(k)}(X)]}{k! \prod_{j=k-1}^{2k-2} (1 - j\delta)\, \mathbb{E} q^k(X)},$$

και έχει προφανή ομοιότητα με τα αντίστοιχα φράγματα του πρώτου μέρους της εργασίας, που προκύπτουν από τη διακριτή ανισότητα τύπου Mohr and Noll. Σημειώνεται ότι για την εφαρμογή των φραγμάτων αυτών *δεν απαιτείται η ύπαρξη άπειρης ακολουθίας ορθογωνίων πολυωνύμων* (ούτε καν ύπαρξη όλων των ροπών για την τυχαία μεταβλητή X), δεδομένου ότι το φράγμα εξακολουθεί να ισχύει για κάθε πεπερασμένη τιμή του n, με μόνη προϋπόθεση ότι υπάρχουν $2n$ ροπές. Έτσι, είναι εφικτή η εφαρμογή των φραγμάτων σε κατανομές όπως η t-κατανομή του student, η F-κατανομή των Fisher-Snedecor κλ.π.

[27] On Rychlik's expectation bound for L-estimates based on identically distributed variates.

Στην εργασία αυτή (η οποία έχει σταλεί με σκοπό να συμπεριληφθεί στον συλλογικό τόμο *Ordered Random Variables–Theory & Applications*), δίδεται μια πολύ απλή και σύντομη απόδειξη του βέλτιστου φράγματος του Rychlik (1993), *Statistics* **24**, 9–15, σχετικά με την μέση τιμή γραμμικών εκτιμητριών, $L = \sum_{i=1}^n c_i X_{i:n}$, από (πιθανώς εξαρτημένα) ισόνομα δείγματα $X_1, X_2, \ldots, X_n$, συναρτήσει της κοινής συνάρτησης κατανομής F των X_i. Συγκεκριμένα, θεωρώντας μια τυχαία μεταβλητή $I(j,n)$ ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σύνολο $\{j, \ldots, n\}$ και ανεξάρτητη από τις X_i, και, επίσης, θεωρώντας μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή $U(j,n)$, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[(j-1)/n, 1]$, αποδεικνύεται (θέτοντας $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$) ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$X = X_{I(j,n):n} \ \text{ και } \ Y = F^{-1}(U(j,n))$$

είναι στοχαστικά διατεταγμένες: $X \leq_{st} Y$. Έτσι, προκύπτει άμεσα ότι

$$\frac{1}{n-j+1} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{E} X_{i:n} = \mathbb{E} X \leq \mathbb{E} Y = \frac{n}{n-j+1} \int_{(j-1)/n}^{1} F^{-1}(u) du,$$

από την οποία έπεται εύκολα το γενικό φράγμα. Η τεχνική αυτή γενικεύεται και σε άλλες περιπτώσεις, όταν π.χ. δεν μπορούμε να υποθέσουμε ισονομία στις $X_1, X_2, \ldots, X_n$.