

Θέμα 1. 20 θεατές άφησαν τα 40 διακεκριμένα παπούτσια τους (ένα δεξιό, ένα αριστερό ο καθένας) στον προθάλαμο του θεάτρου. Κλέφτης, στα σκοτεινά, άρπαξε 14 παπούτσια και τα έβαλε σε ένα σακί. Με πόσους τρόπους γίνεται η κλοπή (δηλαδή πόσες διαφορετικές συνθέσεις σακιών είναι δυνατές) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Αν το σακί δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
 (β) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια.
 (γ) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια και δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
 (δ) Αν το σακί περιέχει είτε και τα δύο είτε κανένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι παπουτσιών θεατή.
 (ε) Αν το σακί περιέχει τουλάχιστον ένα δεξί και τουλάχιστον ένα αριστερό παπούτσι.

Θέμα 2. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 14, \\x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 8.\end{aligned}$$

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_4 + x_5) = 33$.

Θέμα 3. (α) Έστω $\Sigma(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, \nu + 2\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \dots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Sigma(\nu, \kappa)t^{\kappa}$, καθώς και τον αριθμό $\Sigma(\nu, \kappa)$.

(β) Έστω $\Delta(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, \nu + 2\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \dots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την εκθετική γεννήτρια, $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta(\nu, \kappa) \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$, καθώς και τον αριθμό $\Delta(\nu, \kappa)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!