

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΪΟΥ 2013

**Θέμα 1.** Οι δεκαέξι ποδοσφαιρικές ομάδες ενός πρωταθλήματος αποτελούνται από έντεκα διακεκριμένους παίκτες η καθεμία. Συγκεκριμένα, κάθε μία ομάδα αποτελείται από έναν τερματοφύλακα, τέσσερις αμυντικούς, τρεις κεντρώους και τρεις επιθετικούς παίκτες. Φυσικά, οι συνολικά  $16 \times 11 = 176$  παίκτες είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ο ομοσπονδιασκόσ προπονητής θέλει να κατασκευάσει μία μικτή ομάδα αποτελούμενη από έντεκα παίκτες. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατασκευή της μικτής ομάδας σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν η μικτή ομάδα πρέπει να περιέχει έναν τερματοφύλακα, τέσσερις αμυντικούς, τρεις κεντρώους και τρεις επιθετικούς παίκτες.

(β) Αν η μικτή ομάδα πρέπει να μην περιέχει παίκτες από την ίδια ομάδα του πρωταθλήματος.

(γ) Αν η μικτή ομάδα πρέπει να μην περιέχει παίκτες από την ίδια ομάδα του πρωταθλήματος και, ταυτόχρονα, να περιέχει έναν τερματοφύλακα, τέσσερις αμυντικούς, τρεις κεντρώους και τρεις επιθετικούς παίκτες.

(δ) Αν η μικτή ομάδα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον έναν τερματοφύλακα και τουλάχιστον έναν επιθετικό παίκτη.

**Θέμα 2.** Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{\kappa^2}{\kappa+2} \binom{\nu}{\kappa}.$$

**Θέμα 3.** Έστω  $D(\nu, \kappa)$  το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των  $2\nu$  στοιχείων του  $\Omega = \{1, 2, \dots, 2\nu\}$  ανά  $\kappa$ , όπου τα στοιχεία  $1, 2, \dots, \nu$  επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ δύο φορές το καθένα, ενώ τα στοιχεία  $\nu + 1, \nu + 2, \dots, 2\nu$  επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 3 φορές το καθένα. Έστω, επίσης,  $D'(\nu, \kappa)$  το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των  $\nu$  στοιχείων του  $\Omega' = \{1, 2, \dots, \nu\}$  ανά  $\kappa$ , όπου κάθε στοιχείο από τα  $1, 2, \dots, \nu$  επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 5 φορές το καθένα. Δείξτε ότι  $D(\nu, \kappa) = D'(\nu, \kappa)$ .

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**