ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

B

Θέμα 1. Θεωρούμε όλους τους επταψήφιους αριθμούς από το 1000000 ως το 5999999 (σε κάθε τέτοιον αριθμό το πρώτο ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, 5\}$ και τα υπόλοιπα έξι στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, 9\}$).
(α) Πόσοι αριθμοί από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
(β) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι περιττοί;
(γ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι περιττοί και έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
(δ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν το ψηφίο 4;
(ε) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν ακριβώς τρεις φορές το ψηφίο 6 και ακριβώς τρεις φορές το ψηφίο 7;

Απάντηση: (α) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 5 τρόπους, το δεύτερο με 9 (αρκεί να είναι διαφορετικό από το πρώτο), το τρίτο με 8 (αρκεί να είναι διαφορετικό από τα δύο πρώτα) κ.λπ., και έτσι, υπάρχουν $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot (9)_6$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (β) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 5 τρόπους, το δεύτερο, τρίτο, τέταρτο, πέμπτο και έκτο με 10 (μπορούμε να βάλουμε ο,τιδήποτε) και το τελευταίο με 5 (αρκεί να είναι περιττός), και έτσι, υπάρχουν $5 \cdot 10^5 \cdot 5$ περιττοί αριθμοί. (γ) Οι περιττοί του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 5\}$ είναι οι 1, 3 και 5 – τρεις το πλήθος. Διαλέγοντας πρώτα το τελευταίο ψηφίο, μετά το πρώτο, και στη συνέχεια το δεύτερο, τρίτο, τέταρτο, πέμπτο και έκτο ψηφίο του αριθμού, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 12 \cdot (8)_5$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 1, 3 ή 5. Ομοίως, από την πολλαπλασιαστική αρχή βρίσκουμε ότι υπάρχουν $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10 \cdot (8)_5$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 7 ή 9. Επειδή τα δύο παραπάνω σύνολα αριθμών είναι ξένα διαπιστώνουμε, από την αρχή του αθροίσματος, ότι υπάρχουν $12 \cdot (8)_5 + 10 \cdot (8)_5 = 22 \cdot (8)_5$ περιττοί αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (δ) Προφανώς το σύνολο όλων των θεωρούμενων αριθμών, Ω, περιέχει, συνολικά, $5 \cdot 10^6$ αριθμούς. Από αυτούς υπάρχουν ακριβώς $4 \cdot 9^6$ οι οποίοι δεν περιέχουν τεσσάρι, επομένως οι υπόλοιποι $5 \cdot 10^6 - 4 \cdot 9^6$ περιέχουν τουλάχιστον ένα τεσσάρι. (ε) Διαλέγουμε για την πρώτη θέση του αριθμού ένα ψηφίο από τα $1, 2, \ldots, 5$ με 5 τρόπους. Στη συνέχεια, μεταθέτουμε στις υπόλοιπες 6 θέσεις του αριθμού τα τρία εξάρια και τα τρία επτάρια κατά $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6!}{(3!)^2} = 20$ τρόπους – μεταθέσεις δύο ειδών στοιχείων. Από την πολλαπλασιαστική αρχή το ζητούμενο πλήθος ισούται με $5 \cdot 20 = 100$.

Θέμα 2. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \quad \sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu-\kappa)\binom{4}{\kappa}\binom{7}{\nu-\kappa}, \qquad (\beta) \quad \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 4^j \, 7^{2\nu-2j}.$$

Απάντηση: (α) Αν $\kappa = 0$ τότε $\kappa(\nu-\kappa)\binom{4}{\kappa}\binom{7}{\nu-\kappa} = 0$, και το ίδιο συμβαίνει όταν $\kappa = \nu$. Επομένως το άθροισμα ισούται με 0 όταν $\nu = 0$ ή $\nu = 1$. Υποθέτοντας ότι $\nu \geq 2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\kappa\binom{4}{\kappa} = 4\binom{3}{\kappa-1} \text{ και } (\nu-\kappa)\binom{7}{\nu-\kappa} = 7\binom{6}{\nu-\kappa-1} \text{ για κάθε } \kappa = 1, 2, \ldots, \nu-1,$$

το άθροισμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu-\kappa)\binom{4}{\kappa}\binom{7}{\nu-\kappa} &= 0+\sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \kappa(\nu-\kappa)\binom{4}{\kappa}\binom{7}{\nu-\kappa}+0 \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\left[\kappa\binom{4}{\kappa}\right]\cdot\left[(\nu-\kappa)\binom{7}{\nu-\kappa}\right] \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\left[4\binom{3}{\kappa-1}\right]\cdot\left[7\binom{6}{\nu-\kappa-1}\right] \\
&= 28\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\binom{3}{\kappa-1}\binom{6}{\nu-\kappa-1} \\
&= 28\sum_{j=0}^{\nu-2}\binom{3}{j}\binom{6}{\nu-2-j} = 28\binom{9}{\nu-2},
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $j=\kappa-1$ και χρησιμοποιήσαμε τον τύπο Cauchy.

(β) Ας ονομάσουμε S_α το ζητούμενο άθροισμα. Είναι

$$S_\alpha = \sum_{j=0}^{\nu}\binom{2\nu}{2j}4^j\ 7^{2\nu-2j} = \sum_{j=0}^{\nu}\binom{2\nu}{2j}2^{2j}\ 7^{2\nu-2j} = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ άρτιος}}}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa}2^\kappa\ 7^{2\nu-\kappa}.$$

Επομένως, θεωρώντας και το αντίστοιχο άθροισμα για περιττά κ,

$$S_\pi = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ περιττός}}}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa}2^\kappa\ 7^{2\nu-\kappa},$$

βλέπουμε, από το Διωνυμικό Θεώρημα, ότι

$$\begin{aligned}
S_\alpha+S_\pi &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa}2^\kappa\ 7^{2\nu-\kappa} = (2+7)^{2\nu} = 9^{2\nu}, \\
S_\alpha-S_\pi &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu}(-1)^\kappa\binom{2\nu}{\kappa}2^\kappa\ 7^{2\nu-\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa}(-2)^\kappa\ 7^{2\nu-\kappa} = (-2+7)^{2\nu} = 5^{2\nu}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $2S_\alpha = 9^{2\nu}+5^{2\nu}$ δηλαδή $S_\alpha = \frac{9^{2\nu}+5^{2\nu}}{2} = \frac{81^\nu+25^\nu}{2}$.

Θέμα 3. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1+x_2+\cdots+x_\nu+x_{\nu+1}+x_{\nu+2}+\cdots+x_{2\nu} = 8+3\nu$$

με τους περιορισμούς $x_1\geq 3,\ x_2\geq 3,\ldots,x_\nu\geq 3,\ x_{\nu+1}\in\{0,1\},\ x_{\nu+2}\in\{0,1\},\ldots,x_{2\nu}\in\{0,1\}$.

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 όμοια σφαιρίδια στα κελιά $k_1, k_2, \ldots, k_8$, αν τα κελιά k_1, k_2 και k_3 έχουν χωρητικότητα 6 σφαιριδίων το καθένα ενώ τα $k_4, k_5, \ldots, k_8$ έχουν άπειρη χωρητικότητα;

Απάντηση: (α) Θέτοντας $y_i = x_i - 3$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $y_i = x_i$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$, η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$(y_1 + 3) + \cdots + (y_\nu + 3) + y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = 8 + 3\nu,$$

δηλαδή στην

$$y_1 + \cdots + y_\nu + y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = 8,$$

με τους περιορισμούς $y_i \geq 0$ για $i = 1, \ldots, \nu$ και $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$, η οποία έχει τον ίδιο αριθμό ακεραίων λύσεων με την αρχική εξίσωση. [Πράγματι, κάθε λύση $(y_1, \ldots, y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{2\nu})$ της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχεί σε ακριβώς μία λύση $(x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{2\nu})$ της αρχικής, και συγκεκριμμένα, στη λύση εκείνη που $x_i = y_i + 3$ για $i = 1, \ldots, \nu$ και $x_i = y_i$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$.] Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε σταθερό $j \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, ο αριθμός λύσεων της $y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = j$ με $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = \nu+1, \ldots, 2\nu$ ισούται με $\binom{\nu}{j}$, όσοι και οι τρόποι που διαλέγουμε j από τα $y_{\nu+1}, \ldots, y_{2\nu}$ στα οποία θα δώσουμε την τιμή 1, ενώ στα υπόλοιπα y_i θα δώσουμε την τιμή 0. Όμως, όταν $y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = j$, η εξίσωση γράφεται ως $y_1 + \cdots + y_\nu = 8 - j$ με $y_i \geq 0$ για $i = 1, \ldots, \nu$ και, προφανώς, υπάρχουν $\left[{\nu \atop 8-j} \right]$ διαφορετικές λύσεις ως προς $(y_1, \ldots, y_\nu)$. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι για κάθε $j \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, η εξίσωση έχει $\binom{\nu}{j} \left[{\nu \atop 8-j} \right]$ διαφορετικές λύσεις με $y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = j$, και έτσι, από την αρχή του αθροίσματος προκύπτει ότι η αρχική εξίσωση έχει

$$\sum_{j=0}^{8} \binom{\nu}{j} \begin{bmatrix} \nu \\ 8-j \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{8} \binom{\nu}{8-j} \begin{bmatrix} \nu \\ j \end{bmatrix}$$

λύσεις.

(β) Θέτοντας $x_i =$πλήθος σφαιριδίων που τοποθετούνται στο κελί k_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \cdots + x_8 = 20$ με $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ και $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$. Θέτουμε $\Omega = \{$όλες οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_8 = 20$ με $x_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, 8\}$, $A_1 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_8 = 20$ με $x_1 \geq 7$ και $x_i \geq 0$ για $i = 2, \ldots, 8\}$, $A_2 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_8 = 20$ με $x_2 \geq 7$ και $x_i \geq 0$ για $i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και $A_3 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_8 = 20$ με $x_3 \geq 7$ και $x_i \geq 0$ για $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Επομένως ζητάμε τον πληθάριθμο του $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Προφανώς $N(\Omega) = \left[{8 \atop 20} \right]$, $N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) = \left[{8 \atop 13} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς $(y_1, \ldots, y_8)$) της εξίσωσης $(y_1 + 7) + y_2 + \cdots + y_8 = 20]$, $N(A_1 \cap A_2) = N(A_1 \cap A_3) = N(A_2 \cap A_3) = \left[{8 \atop 6} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1 \cap A_2)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς $(y_1, \ldots, y_8)$) της εξίσωσης $(y_1 + 7) + (y_2 + 7) + y_3 + \cdots + y_8 = 20]$ και

$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left[{8 \atop -1} \right] = 0$ [η εξίσωση $(y_1+7)+(y_2+7)+(y_3+7)+y_4+\cdots+y_8 = 20$ δεν έχει μη αρνητικές λύσεις ως προς $(y_1, \ldots, y_8)$]. Συνεπώς, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ο αριθμός των ζητούμενων τοποθετήσεων ισούται με

$$\begin{aligned} N(A_1' \cap A_2' \cap A_3') &= N(\Omega) - [N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)] \\ &\quad +[N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)] - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \left[{8 \atop 20} \right] - 3 \cdot \left[{8 \atop 13} \right] + 3 \cdot \left[{8 \atop 6} \right] - 0. \end{aligned}$$

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ, όπου το $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών στη διάταξη (1 ή 3 ή 5 ή ...), ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία του Ω δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε
(α) την εκθετική γεννήτρια,

$$E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}, \qquad \text{και}$$

(β) τον αριθμό α_κ.

Απάντηση: (α) Η απαριθμήτρια διατάξεων του στοιχείου $\omega_{\nu+1}$ είναι

$$E_{\nu+1}(t) = \sum_{s \geq 0,\ \text{περιττός}} \frac{t^s}{s!} = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία ω_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, έχουμε

$$E_i(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = e^t, \quad i = 1, 2 \ldots, \nu.$$

Επομένως, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια διατάξεων είναι η

$$E(t) = E_1(t) \cdots E_\nu(t) E_{\nu+1}(t) = (e^t)^\nu \, \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) e^{\nu t}.$$

(β) Αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια σε δυναμοσειρά, σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}(e^{(\nu+1)t} - e^{(\nu-1)t}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu+1)t)^\kappa}{\kappa!} - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu-1)t)^\kappa}{\kappa!} \right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\nu+1)^\kappa - (\nu-1)^\kappa}{2} \right\} \frac{t^\kappa}{\kappa!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο αριθμός α_κ ισούται με τον συντελεστή του $\frac{t^\kappa}{\kappa!}$ στο προηγούμενο ανάπτυγμα, δηλ. $\alpha_\kappa = \frac{(\nu+1)^\kappa - (\nu-1)^\kappa}{2}$.