ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α

Θέμα 1. Θεωρούμε όλους τους πενταψήφιους αριθμούς από το 10000 ως το 79999 (σε κάθε τέτοιον αριθμό το πρώτο ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, \dots, 7\}$ και τα υπόλοιπα τέσσερα στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 9\}$).
(α) Πόσοι αριθμοί από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
(β) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι άρτιοι;
(γ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι άρτιοι και έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
(δ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν το ψηφίο 3;
(ε) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν ακριβώς δύο φορές το ψηφίο 8 και ακριβώς δύο φορές το ψηφίο 9;

Απάντηση: (α) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 7 τρόπους, το δεύτερο με 9 (αρκεί να είναι διαφορετικό από το πρώτο), το τρίτο με 8 (αρκεί να είναι διαφορετικό από τα δύο πρώτα) κ.λπ., και έτσι, υπάρχουν $7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 7 \cdot (9)_4$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (β) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 7 τρόπους, το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο με 10 (μπορούμε να βάλουμε ο,τιδήποτε) και το τελευταίο με 5 (αρκεί να είναι άρτιος), και έτσι, υπάρχουν $7 \cdot 10^3 \cdot 5$ άρτιοι αριθμοί. (γ) Οι άρτιοι του συνόλου $\{1, 2, \dots, 7\}$ είναι οι 2, 4 και 6 – τρεις το πλήθος. Διαλέγοντας πρώτα το τελευταίο ψηφίο, μετά το πρώτο, και στη συνέχεια το δεύτερο, τρίτο, και τέταρτο ψηφίο του αριθμού, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 18 \cdot (8)_3$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 2, 4 ή 6. Ομοίως, από την πολλαπλασιαστική αρχή βρίσκουμε ότι υπάρχουν $2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 14 \cdot (8)_3$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 0 ή 8. Επειδή τα δύο παραπάνω σύνολα αριθμών είναι ξένα διαπιστώνουμε, από την αρχή του αθροίσματος, ότι υπάρχουν $18 \cdot (8)_3 + 14 \cdot (8)_3 = 32 \cdot (8)_3$ άρτιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (δ) Προφανώς το σύνολο όλων των θεωρούμενων αριθμών, Ω, περιέχει, συνολικά, $7 \cdot 10^4$ αριθμούς. Από αυτούς υπάρχουν ακριβώς $6 \cdot 9^4$ οι οποίοι δεν περιέχουν τριάρι, επομένως οι υπόλοιποι $7 \cdot 10^4 - 6 \cdot 9^4$ περιέχουν τουλάχιστον ένα τριάρι. (ε) Διαλέγουμε για την πρώτη θέση του αριθμού ένα ψηφίο από τα $1, 2, \dots, 7$ με 7 τρόπους. Στη συνέχεια, μεταθέτουμε στις υπόλοιπες 4 θέσεις του αριθμού τα δύο οκτάρια και τα δύο εννιάρια κατά $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$ τρόπους – μεταθέσεις δύο ειδών στοιχείων. Από την πολλαπλασιαστική αρχή το ζητούμενο πλήθος ισούται με $7 \cdot 6 = 42$.

Θέμα 2. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \quad \sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu-\kappa)\binom{9}{\kappa}\binom{5}{\nu-\kappa}, \qquad (\beta) \quad \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 9^j \, 5^{2\nu-2j}.$$

Απάντηση: (α) Αν $\kappa = 0$ τότε $\kappa(\nu-\kappa)\binom{9}{\kappa}\binom{5}{\nu-\kappa} = 0$, και το ίδιο συμβαίνει όταν $\kappa = \nu$. Επομένως το άθροισμα ισούται με 0 όταν $\nu = 0$ ή $\nu = 1$. Υποθέτοντας ότι $\nu \geq 2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\kappa\binom{9}{\kappa} = 9\binom{8}{\kappa-1} \text{ και } (\nu-\kappa)\binom{5}{\nu-\kappa} = 5\binom{4}{\nu-\kappa-1} \text{ για κάθε } \kappa = 1, 2, \dots, \nu-1,$$

το άθροισμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu-\kappa)\binom{9}{\kappa}\binom{5}{\nu-\kappa} &= 0 + \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \kappa(\nu-\kappa)\binom{9}{\kappa}\binom{5}{\nu-\kappa} + 0 \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \left[\kappa\binom{9}{\kappa}\right] \cdot \left[(\nu-\kappa)\binom{5}{\nu-\kappa}\right] \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \left[9\binom{8}{\kappa-1}\right] \cdot \left[5\binom{4}{\nu-\kappa-1}\right] \\
&= 45\sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \binom{8}{\kappa-1}\binom{4}{\nu-\kappa-1} \\
&= 45\sum_{j=0}^{\nu-2} \binom{8}{j}\binom{4}{\nu-2-j} = 45\binom{12}{\nu-2},
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $j=\kappa-1$ και χρησιμοποιήσαμε τον τύπο Cauchy.

(β) Ας ονομάσουμε S_α το ζητούμενο άθροισμα. Είναι

$$S_\alpha = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 9^j\ 5^{2\nu-2j} = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 3^{2j}\ 5^{2\nu-2j} = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ άρτιος}}}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 3^\kappa\ 5^{2\nu-\kappa}.$$

Επομένως, θεωρώντας και το αντίστοιχο άθροισμα για περιττά κ,

$$S_\pi = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ περιττός}}}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 3^\kappa\ 5^{2\nu-\kappa},$$

βλέπουμε, από το Διωνυμικό Θεώρημα, ότι

$$\begin{aligned}
S_\alpha + S_\pi &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 3^\kappa\ 5^{2\nu-\kappa} = (3+5)^{2\nu} = 8^{2\nu}, \\
S_\alpha - S_\pi &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu} (-1)^\kappa \binom{2\nu}{\kappa} 3^\kappa\ 5^{2\nu-\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} (-3)^\kappa\ 5^{2\nu-\kappa} = (-3+5)^{2\nu} = 2^{2\nu}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $2S_\alpha = 8^{2\nu} + 2^{2\nu}$ δηλαδή $S_\alpha = \frac{8^{2\nu}+2^{2\nu}}{2} = \frac{64^\nu+4^\nu}{2}$.

Θέμα 3. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu + x_{\nu+1} + x_{\nu+2} + \cdots + x_{2\nu} = 9 + 2\nu$$

με τους περιορισμούς $x_1 \in \{0,1\},\ x_2 \in \{0,1\}, \ldots, x_\nu \in \{0,1\},\ x_{\nu+1} \geq 2,\ x_{\nu+2} \geq 2, \ldots, x_{2\nu} \geq 2$.

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 30 όμοια σφαιρίδια στα κελιά $k_1, k_2, \ldots, k_6$, αν τα κελιά k_1, k_2 και k_6 έχουν χωρητικότητα 5 σφαιριδίων το καθένα ενώ τα k_3, k_4 και k_5 έχουν άπειρη χωρητικότητα;

Απάντηση: (α) Θέτοντας $y_i = x_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $y_i = x_i - 2$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$, η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$y_1 + \cdots + y_\nu + (y_{\nu+1} + 2) + \cdots + (y_{2\nu} + 2) = 9 + 2\nu,$$

δηλαδή στην

$$y_1 + \cdots + y_\nu + y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = 9,$$

με τους περιορισμούς $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = 1, \ldots, \nu$ και $y_i \geq 0$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$, η οποία έχει τον ίδιο αριθμό ακεραίων λύσεων με την αρχική εξίσωση. [Πράγματι, κάθε λύση $(y_1, \ldots, y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{2\nu})$ της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχεί σε ακριβώς μία λύση $(x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{2\nu})$ της αρχικής, και συγκεκριμμένα, στη λύση εκείνη που $x_i = y_i$ για $i = 1, \ldots, \nu$ και $x_i = y_i + 2$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$.] Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε σταθερό $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, ο αριθμός λύσεων της $y_1 + \cdots + y_\nu = j$ με $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = 1, \ldots, \nu$ ισούται με $\binom{\nu}{j}$, όσοι και οι τρόποι που διαλέγουμε j από τα $y_1, \ldots, y_\nu$ στα οποία θα δώσουμε την τιμή 1, ενώ στα υπόλοιπα y_i θα δώσουμε την τιμή 0. Όμως, όταν $y_1 + \cdots + y_\nu = j$, η εξίσωση γράφεται ως $y_{\nu+1} + \cdots + y_{2\nu} = 9 - j$ με $y_i \geq 0$ για $i = \nu + 1, \ldots, 2\nu$ και, προφανώς, υπάρχουν $\left[{\nu \atop 9-j} \right]$ διαφορετικές λύσεις ως προς $(y_{\nu+1}, \ldots, y_{2\nu})$. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι για κάθε $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, η εξίσωση έχει $\binom{\nu}{j}\left[{\nu \atop 9-j} \right]$ διαφορετικές λύσεις με $y_1 + \cdots + y_\nu = j$, και έτσι, από την αρχή του αθροίσματος προκύπτει ότι η αρχική εξίσωση έχει

$$\sum_{j=0}^{9} \binom{\nu}{j} \left[\begin{matrix} \nu \\ 9-j \end{matrix} \right] = \sum_{j=0}^{9} \binom{\nu}{9-j} \left[\begin{matrix} \nu \\ j \end{matrix} \right]$$

λύσεις.

(β) Θέτοντας $x_i =$πλήθος σφαιριδίων που τοποθετούνται στο κελί k_i, $i = 1, 2, \ldots 6$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ με $x_1, x_2, x_6 \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ και $x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Θέτουμε $\Omega = \{$όλες οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ με $x_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, 6\}$, $A_1 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ με $x_1 \geq 6$ και $x_i \geq 0$ για $i = 2, \ldots, 6\}$, $A_2 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ με $x_2 \geq 6$ και $x_i \geq 0$ για $i = 1, 3, 4, 5, 6\}$ και $A_3 = \{$οι ακέραιες λύσεις της $x_1 + \cdots + x_6 = 30$ με $x_6 \geq 6$ και $x_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, 5\}$. Επομένως ζητάμε τον πληθάριθμο του $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Προφανώς $N(\Omega) = \left[{6 \atop 30} \right]$, $N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) = \left[{6 \atop 24} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς $(y_1, \ldots, y_6)$) της εξίσωσης $(y_1 + 6) + y_2 + \cdots + y_6 = 30$], $N(A_1 \cap A_2) = N(A_1 \cap A_3) = N(A_2 \cap A_3) = \left[{6 \atop 18} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1 \cap A_2)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς $(y_1, \ldots, y_6)$) της εξίσωσης $(y_1 + 6) + (y_2 + 6) + y_3 + \cdots + y_6 = 30$] και

$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left[{6 \atop 12} \right]$. Συνεπώς, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ο αριθμός των ζητούμενων τοποθετήσεων ισούται με

$$\begin{aligned} N(A_1' \cap A_2' \cap A_3') &= N(\Omega) - [N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)] \\ &\quad + [N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)] - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \left[{6 \atop 30} \right] - 3 \cdot \left[{6 \atop 24} \right] + 3 \cdot \left[{6 \atop 18} \right] - \left[{6 \atop 12} \right]. \end{aligned}$$

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu+1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ, όπου το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών στη διάταξη (0 ή 2 ή 4 ή ...), ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία του Ω δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε
(α) την εκθετική γεννήτρια,

$$E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \, \frac{t^\kappa}{\kappa!}, \qquad \text{και}$$

(β) τον αριθμό α_κ.

Απάντηση: (α) Η απαριθμήτρια διατάξεων του στοιχείου ω_0 είναι

$$E_0(t) = \sum_{s \geq 0, \text{ άρτιος}} \frac{t^s}{s!} = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία ω_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, έχουμε

$$E_i(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = e^t, \quad i = 1, 2 \ldots, \nu.$$

Επομένως, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια διατάξεων είναι η

$$E(t) = E_0(t) E_1(t) \cdots E_\nu(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} (e^t)^\nu = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) e^{\nu t}.$$

(β) Αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια σε δυναμοσειρά, σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}(e^{(\nu+1)t} + e^{(\nu-1)t}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu+1)t)^\kappa}{\kappa!} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu-1)t)^\kappa}{\kappa!} \right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\nu+1)^\kappa + (\nu-1)^\kappa}{2} \right\} \frac{t^\kappa}{\kappa!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο αριθμός α_κ ισούται με τον συντελεστή του $\frac{t^\kappa}{\kappa!}$ στο προηγούμενο ανάπτυγμα, δηλ. $\alpha_\kappa = \frac{(\nu+1)^\kappa + (\nu-1)^\kappa}{2}$.