

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο των κεφαλαίων γραμμάτων του Ελληνικού Αλφάβητου που περιέχει 24 γράμματα, από τα οποία 7 είναι φωνήεντα (Α,Ε,Η,Ι,Ο,Υ,Ω) και τα υπόλοιπα 17 είναι σύμφωνα. Ως λέξη ορίζουμε μια επαναληπτική διάταξη στοιχείων του συνόλου αυτού (δεν είναι απαραίτητο να έχει νόημα).

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα, που αρχίζουν με Α, τελειώνουν με Ε και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα (δηλαδή κάθε γράμμα της λέξης εμφανίζεται μόνο μια φορά);

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες τα πρώτα 6 γράμματα είναι φωνήεντα και τα τελευταία 4 γράμματα είναι σύμφωνα;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα που περιέχουν όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα;

(δ) (1.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 5 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά;

Θέμα 2. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu \leq 3 \cdot 2^\nu + 2$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq 3 \cdot \binom{\nu}{i}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$.

(β) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 1$ ακέραιος. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \left(\nu \kappa + \binom{\nu}{\kappa} \right).$$

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 1000 όμοιες καραμέλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει το πολύ 300 καραμέλες.

(β) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 1000 όμοιες καραμέλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 5 καραμέλες και το πολύ 505.

Θέμα 4. (α) (1.5 βαθμ.) Έστω α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

(β) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των συνδυασμών 3 ανά 100 με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, όπου το στοιχείο ω_1 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά, το στοιχείο ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορές (0 ή 2 ή 4 ή ...) και το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται οποιονδήποτε αριθμό φορές (χωρίς περιορισμό).

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!