ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Β

Επώνυμο	
Όνομα	
Όνομα Πατρός	
Αριθμός Μητρώου	

Θέμα	Βαθμολογία
1α (1.0 βαθμ.)	
1β (0.5 βαθμ.)	
1γ (0.5 βαθμ.)	
1δ (0.5 βαθμ.)	
1ε (2.0 βαθμ.)	
2α (1.0 βαθμ.)	
2β (1.0 βαθμ.)	
3α (1.5 βαθμ.)	
3β (1.0 βαθμ.)	
4α (1.0 βαθμ.)	
4β (1.0 βαθμ.)	
Σύνολο	

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Γράφετε όλα τα θέματα σε 2 ώρες. Τα θέματα αθροίζουν στις 11 μονάδες. Ο τελικός βαθμός θα είναι min(άθροισμα βαθμών,10).
- Γράφετε τις απαντήσεις που θέλετε να ληφθούν υπόψη ακριβώς μετά την εκφώνηση κάθε θέματος (στην ίδια σελίδα και στις σελίδες που ακολουθούν μέχρι να αρχίσει το επόμενο θέμα). Για πρόχειρο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σελίδες που βρίσκονται στο τέλος).
- Η αναχώρηση από την αίθουσα επιτρέπεται μετά από 30 λεπτά από την έναρξη της εξέτασης.
- Τα κινητά τηλέφωνα θα πρέπει να είναι απενεργοποιημένα καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2009\}$.

(α) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 2007, 2008 και 2009 βρίσκονται σε κάποιες απο τις 20 τελευταίες θέσεις;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 100 στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς 60 είναι περιττά;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω που δεν έχουν διαδοχικά άρτια στοιχεία;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 40 στοιχεία και περιέχουν οπωσδήποτε τους αριθμούς 1, 2 και 3;

(ε) (2.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 2009 δεν καταλαμβάνει την τελευταία θέση, το στοιχείο 2008 δεν καταλαμβάνει τη προτελευταία θέση και το στοιχείο 1 δεν καταλαμβάνει την πρώτη θέση;

Θέμα 1 - Απαντήσεις:

Θέμα 1 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 1 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 2. (α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπουν μπορούν να κατανεμηθούν 2009 όμοια σφαιρίδια σε 50 διακεκριμένα κελιά, όταν το τελευταίο κελί έχει χωρητικότητα 200 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} + x_{12} \leq 200,$$

με τους περιορισμούς $x_0 \in \{0, 10\}$, $x_1 \in \{0, 1\}$ και $x_i \geq 2$ για $i = 2, 3, 4, \ldots, 12$.

Θέμα 2 - Απαντήσεις:

Θέμα 2 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu+4-\kappa}{4}\binom{5+\kappa}{\kappa},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa}\frac{(\nu-\kappa)^2}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 3 - Απαντήσεις:

Θέμα 3 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 4. Έστω a_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των 2ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\nu}\}$ ανά κ, όπου τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ εμφανίζονται 3 ή 6 φορές το καθένα και τα $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \ldots, \omega_{2\nu}$ εμφανίζονται πολλαπλάσιο του 6 αριθμό φορών (δηλαδή 0 ή 6 ή 12 κλπ. φορές) το καθένα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa t^\kappa.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι όροι a_κ για $\varkappa = 3\nu + 21$ και $\kappa = 3\nu + 22$.

Θέμα 4 - Απαντήσεις:

Πρόχειρο

Πρόχειρο