ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Α

Επώνυμο	
Όνομα	
Όνομα Πατρός	
Αριθμός Μητρώου	

Θέμα	Βαθμολογία
1α (0.5 βαθμ.)	
1β (0.5 βαθμ.)	
1γ (0.5 βαθμ.)	
1δ (1.0 βαθμ.)	
1ε (2.0 βαθμ.)	
2α (1.0 βαθμ.)	
2β (1.0 βαθμ.)	
3α (1.0 βαθμ.)	
3β (1.5 βαθμ.)	
4α (1.0 βαθμ.)	
4β (1.0 βαθμ.)	
Σύνολο	

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Γράφετε όλα τα θέματα σε 2 ώρες. Τα θέματα αθροίζουν στις 11 μονάδες. Ο τελικός βαθμός θα είναι min(άθροισμα βαθμών,10).
- Γράφετε τις απαντήσεις που θέλετε να ληφθούν υπόψη ακριβώς μετά την εκφώνηση κάθε θέματος (στην ίδια σελίδα και στις σελίδες που ακολουθούν μέχρι να αρχίσει το επόμενο θέμα). Για πρόχειρο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σελίδες που βρίσκονται στο τέλος).
- Η αναχώρηση από την αίθουσα επιτρέπεται μετά από 30 λεπτά από την έναρξη της εξέτασης.
- Τα κινητά τηλέφωνα θα πρέπει να είναι απενεργοποιημένα καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2009\}$.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 20 στοιχεία και περιέχουν οπωσδήποτε τους αριθμούς 3 και 8;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω που δεν έχουν διαδοχικά άρτια στοιχεία;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 70 στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς 30 είναι άρτια;

(δ) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 1, 2 και 3 βρίσκονται σε κάποιες απο τις 8 πρώτες θέσεις;

(ε) (2.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 1 δεν καταλαμβάνει την πρώτη θέση, το στοιχείο 2 δεν καταλαμβάνει τη δεύτερη θέση και το στοιχείο 3 δεν καταλαμβάνει την τελευταία θέση;

Θέμα 1 - Απαντήσεις:

Θέμα 1 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 1 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 2. (α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leq 200,$$

με τους περιορισμούς $x_0 \in \{0, 1\}$, $x_1 \in \{0, 10\}$ και $x_i \geq 1$ για $i = 2, 3, 4, \ldots, 10$.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπουν μπορούν να κατανεμηθούν 2009 όμοια σφαιρίδια σε 20 διακεκριμένα κελιά, όταν το πρώτο κελί έχει χωρητικότητα 100 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

Θέμα 2 - Απαντήσεις:

Θέμα 2 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 3. (α) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{\kappa^2}{\nu} \binom{\nu}{\nu-\kappa}, \ \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{4+\kappa}{4} \binom{\nu+6-\kappa}{6}, \ \nu \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 3 - Απαντήσεις:

Θέμα 3 - Απαντήσεις συνέχεια:

Θέμα 4. Έστω a_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των 2ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\nu}\}$ ανά κ, όπου τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ εμφανίζονται πολλαπλάσιο του 4 αριθμό φορών (δηλαδή 0 ή 4 ή 8 κλπ. φορές) το καθένα και τα $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \ldots, \omega_{2\nu}$ εμφανίζονται 2 ή 4 φορές το καθένα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa t^\kappa.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι όροι a_κ για $\varkappa = 2\nu + 4$ και $\kappa = 2\nu + 5$.

Θέμα 4 - Απαντήσεις:

Πρόχειρο

Πρόχειρο