ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2002

Θέμα 1. Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και ας θεωρήσουμε τους ακεραίους k, r, j με $1 \leq j \leq k \leq \nu$ και $j \leq r \leq j + \nu - k$. Βρείτε πόσα υποσύνολα του Ω υπάρχουν, έτσι ώστε να ικανοποιούνται **ταυτόχρονα** οι παρακάτω τρεις ιδιότητες.
(α) Περιέχουν ακριβώς k στοιχεία.
(β) Περιέχουν τον ακέραιο r.
(γ) Περιέχουν ακριβώς $j - 1$ ακεραίους μικρότερους του r.

Θέμα 2. Να βρεθεί το πλήθος ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2\nu} + x_{2\nu+1} = k,$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq 2$ για i περιττό, $1 \leq i \leq 2\nu - 1$, $x_i \geq 3$ για i άρτιο, $1 \leq i \leq 2\nu$ και $3 \leq x_{2\nu+1} \leq 4$, όπου ν, k δοθέντες θετικοί ακέραιοι με $k \geq 5\nu + 4$.

Θέμα 3. Πόσοι αριθμοί από τους $\{1, 2, 3, \ldots, 2002\}$ διαιρούνται με τουλάχιστον έναν από τους $6, 10, 15$; Πόσοι διαιρούνται με ακριβώς δύο;

Θέμα 4. Έστω $R(\nu, k)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu\}$ ανά k, στους οποίους κάθε στοιχείο εμφανίζεται μέχρι τρεις το πολύ φορές.
(α) Υπολογίστε τη γεννήτρια

$$A_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\nu, k) t^k.$$

(β) Αποδείξτε την αναγωγική σχέση

$$R(\nu + 1, k) = R(\nu, k) + R(\nu, k-1) + R(\nu, k-2) + R(\nu, k-3), \; k \geq 3.$$

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!