

Θέμα 1. (α) Η κάλπη A περιέχει 3 κόκκινες και 3 μαύρες σφαίρες, ενώ η κάλπη B περιέχει 4 κόκκινες και 6 μαύρες. Μία σφαίρα εκλέγεται τυχαία από κάθε κάλπη. Να βρεθεί η πιθανότητα οι δύο εκλεγείσες σφαίρες να είναι του ίδιου χρώματος.

(β) Μία κάλπη περιέχει 3 μαύρες, 2 κόκκινες και 3 πράσινες σφαίρες. Ένας παίκτης διαλέγει στην τύχη μία σφαίρα και κερδίζει δύο Ευρώ αν η σφαίρα είναι μαύρη, χάνει ένα Ευρώ αν η σφαίρα είναι κόκκινη, ενώ δεν κερδίζει τίποτε αν η σφαίρα είναι πράσινη.

(β1) Να βρείτε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη καθώς και την διασπορά και την τυπική απόκλιση του κέρδους.

(β2) Αν το πείραμα επαναληφθεί 100 ανεξάρτητες φορές, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα να κερδίσει συνολικά ο παίκτης τουλάχιστον 50 Ευρώ.

Θέμα 2. Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 2c - x^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ σταθερά.

(α) Βρείτε τη σταθερά c .

(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Θέμα 3. (α) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x; \theta) = 5\theta x^4 e^{-\theta x^5}, \quad 0 < x < \infty \quad (0 < \theta < \infty).$$

Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του θ .

(β) Έστω 36, 29, 27, 36, 30, 35, 29, 20, 27, 31 ένα τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων από μία κανονική κατανομή με (άγνωστο) μέσο μ και $\sigma = 5$.

(β1) Ελέγξτε την υπόθεση $H_0 : \mu = 35$ έναντι της $H_1 : \mu \neq 35$ (σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$).

(β2) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο μ .

[Τιμές από Στατιστικούς Πίνακες: $\Phi(1.28) = 0.90$, $\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής, $N(0, 1)$.]

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!