

**Θέμα 1.** Ο Α, ένας συγκεκριμένος, μετρίων δυνατοτήτων, φοιτητής, έχει πιθανότητα  $1/3$  να επιτύχει σε κάθε μάθημα στο οποίο εξετάζεται. Ο Α χρωστάει 4 μαθήματα για να πάρει πτυχίο. Έστω  $X$  η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των μαθημάτων που τελικά θα εξεταστεί ο Α μέχρι να πάρει το πτυχίο του (δηλ. μέχρι να επιτύχει σε 4 μαθήματα).

(α) Να βρεθεί η  $\mathbb{P}(X \geq 5)$ , δηλ. η πιθανότητα όπως απαιτηθεί να εξεταστεί σε τουλάχιστον 5 μαθήματα μέχρι τη λήψη του πτυχίου.

(β) Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός μαθημάτων,  $\mathbb{E}(X)$ , στα οποία θα εξεταστεί ο Α;

(γ) Να βρείτε την διασπορά,  $\text{Var}(X)$ , της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

**Θέμα 2.** Η συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x/18, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $c > 0$  σταθερά.

(α) Να βρείτε τη σταθερά  $c$  και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , της  $X$ .

(β) Να προσδιορίσετε τις ροπές της  $X$ ,  $\mathbb{E}(X^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της  $X$ .

(γ) Θέτουμε  $Y_1 = X^3$  και  $Y_2 = X^2$ . Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των  $Y_1$  και  $Y_2$ .

**Θέμα 3.** (α) Λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_\nu$  ( $\nu \geq 2$ ) από πληθυσμό με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $\theta > 0$  η άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο  $\theta$ .

(β) Λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_\nu$  ( $\nu \geq 2$ ) από πληθυσμό με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $\theta > 0$  η άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο  $\theta$ .

(γ) Να βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια για το  $\theta$  σε καθένα από τα ερωτήματα (α) και (β).

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ  $2\frac{1}{2}$  ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**