

Θέμα 1. Ο Α, ένας συγκεκριμένος, μετρίων δυνατοτήτων, φοιτητής, έχει πιθανότητα $1/4$ να επιτύχει σε κάθε μάθημα στο οποίο εξετάζεται. Ο Α χρωστάει 3 μαθήματα για να πάρει πτυχίο. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των μαθημάτων που τελικά θα εξεταστεί ο Α μέχρι να πάρει το πτυχίο του (δηλ. μέχρι να επιτύχει σε 3 μαθήματα).

(α) Να βρεθεί η $\mathbb{P}(X \geq 4)$, δηλ. η πιθανότητα όπως απαιτηθεί να εξεταστεί σε τουλάχιστον 4 μαθήματα μέχρι τη λήψη του πτυχίου.

(β) Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός μαθημάτων, $\mathbb{E}(X)$, στα οποία θα εξεταστεί ο Α;

(γ) Να βρείτε την διασπορά, $\text{Var}(X)$, της τυχαίας μεταβλητής X .

Θέμα 2. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ σταθερά.

(α) Να βρείτε τη σταθερά c και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$, της X .

(β) Να προσδιορίσετε τις ροπές της X , $\mathbb{E}(X^n)$, $n = 1, 2, \dots$, και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .

(γ) Θέτουμε $Y_1 = X^2$ και $Y_2 = X^3$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των Y_1 και Y_2 .

Θέμα 3. (α) Λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_ν ($\nu \geq 2$) από πληθυσμό με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\theta > 0$ η άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο θ .

(β) Λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_ν ($\nu \geq 2$) από πληθυσμό με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\theta > 0$ η άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο θ .

(γ) Να βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια για το θ σε καθένα από τα ερωτήματα (α) και (β).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!