ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ και ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017 Α

Θέμα 1. (α) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι 7 ανεξάρτητες φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες (i) η μέγιστη ένδειξη να είναι ίση με '5' και (ii) να εμφανιστούν και οι τρεις ενδείξεις '4', '5' και '6' (από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία).
(β) Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο $\{2, 3, \ldots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = P(X = x) = c\frac{x-1}{x!}, \quad x = 2, 3, \ldots,$$

όπου c σταθερά. Υπολογίστε (i) την σταθερά c (ii) την μέση τιμή της X και (iii) την διασπορά της X.

Θέμα 2. Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} c - x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $c > 0$ σταθερά.
(α) Βρείτε τη σταθερά c.
(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(γ) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με εκθετική κατανομή, δηλ. με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad 0 < x < \infty \quad (0 < \theta < \infty).$$

Να δειχθεί ότι η ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου θ συμπίπτει με την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας αυτής.

Θέμα 4. Έστω $10, 16, 11, 6, 6, 11, 10, 8, 10$ ένα τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων από μία κανονική κατανομή με (άγνωστο) μέσο μ και (γνωστή) διασπορά $\sigma^2 = 9$.
(α) Ελέγξτε την υπόθεση $H_0 : \mu = 8$ έναντι της $H_1 : \mu \neq 8$ (σε επίπεδο σημαντικότητος $\alpha = 5\%$).
(β) Βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο μ.
(γ) Εξηγήστε πώς οι απαντήσεις σας στα παραπάνω υποερωτήματα σχετίζονται μεταξύ τους.

[Τιμές από Στατιστικούς Πίνακες: $\Phi(1.28) = 0.90$, $\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής, $N(0, 1)$.]

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!