

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2020

ΘΕΜΑ 1. (α) Διατυπώστε το Θεώρημα Dynkin.

(β) Αποδείξτε τον παρακάτω ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα: "Αν \mathcal{D} είναι μία μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω για την οποία $\delta(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D})$ τότε η \mathcal{D} είναι π-σύστημα (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές)".

ΘΕΜΑ 2. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ .

(α) Αποδείξτε ότι

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re}(\phi(t))}{t^2} dt,$$

όπου $\operatorname{Re}(\phi(t))$ το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\phi(t)$ (η ισότητα ισχύει ακόμα και αν $\mathbb{E}|X| = +\infty$).

(β) Υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-t^2/2}}{t^2} dt.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{P}(X \geq r) = \mathbb{P}(Y \geq r)$ για κάθε ρητό πραγματικό αριθμό r . Να δειχθεί ότι οι X, Y είναι ισόνομες.

(β) Έστω X, Y, Z τρεις τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν καθένα από τα ζεύγη σ-αλγεβρών $\sigma(X), \sigma(Y, Z)$ και $\sigma(X, Y), \sigma(Z)$ είναι ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ 4. (α) Διατυπώστε τις συνθήκες Lindeberg και Lyapounov για ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

(β) Κατασκευάστε παράδειγμα ανεξάρτητης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών για την οποία ικανοποιείται η συνθήκη του Lindeberg αλλά δεν ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ $1\frac{1}{2}$ ΩΡΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!