ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019

ΘΕΜΑ 1. (α) Διατυπώστε το Θεώρημα Dynkin.
(β) Αποδείξτε ότι μία κλάση υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγεβρα στον Ω αν και μόνο αν είναι λ-κλάση στον Ω και π-σύστημα (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές).
(γ) Αποδείξτε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη όταν και μόνο όταν οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ και $\sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $n \geq 2$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι κατ' ανάγκην ανεξάρτητη) για την οποία ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Να δειχθεί ότι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
(β) Να κατασκευάσετε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής δύο ιδιότητες: (i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$, και (ii) $\mathbb{E}(X_n) \to 0$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν οι X_n και Y_n είναι δύο ακολουθίες ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητων στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, να δειχθεί ότι και η ακολουθία $X_n + Y_n$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
(β) Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_{X_1}(t) = \frac{1-e^{-2it}}{2it}$, $t \in \mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι, καθώς $n \to \infty$, οι δειγματικοί μέσοι $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα προς κάποια σταθερά c, την οποία και να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 4. Η τυχαία μεταβλητή X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-j, j)$, και οι $X_1, X_2, X_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες. Δείξτε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov για $\delta = 2$, και αποδείξτε ότι

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!