ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018

ΘΕΜΑ 1. (α) Διατυπώστε το Θεώρημα Dynkin.
(β) Αποδείξτε ότι μία κλάση υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγεβρα στον Ω αν και μόνο αν είναι κλάση Dynkin στον Ω και π-σύστημα (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές).
(γ) Θεωρώντας τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3\}$ και την κλάση υποσυνόλων του Ω, $\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, δείξε ότι **δεν ισχύει** το αντίστροφο του Θεωρήματος Dynkin.

ΘΕΜΑ 2. (α) Θεωρούμε μία ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\{F_n,\ n \geq 1\}$, και μία συνάρτηση κατανομής F. Αποδείξτε ότι αν $F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F$ και η F είναι **συνεχής**, τότε

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0, \quad \text{καθώς } \ n \to \infty.$$

(β) Κατασκευάστε ακολουθία $\{F_n,\ n \geq 1\}$ **συνεχών συναρτήσεων κατανομής** τέτοια ώστε καθώς $n \to \infty$,

$$F_n(x) \to \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν οι X_n και Y_n είναι δύο ακολουθίες ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητων στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, να δειχθεί ότι και η ακολουθία $X_n + Y_n$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε $n \in \{1, 2, \ldots\}$ και $\alpha > 0$, $|X_n + Y_n| I(|X_n + Y_n| \geq \alpha) \leq 2|X_n| I(|X_n| \geq \alpha/2) + 2|Y_n| I(|Y_n| \geq \alpha/2)$.]
(β) Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_{X_1}(t) = \frac{1-e^{-4it}}{4it}$, $t \in \mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι, καθώς $n \to \infty$, οι δειγματικοί μέσοι $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα προς κάποια σταθερά c, την οποία και να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 4. Η τυχαία μεταβλητή X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-j, j)$, και οι $X_1, X_2, X_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες. Δείξτε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov για $\delta = 2$, και αποδείξτε ότι

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!