ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Θέμα 1. Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και έστω $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ και $\mathcal{P}$ μη κενές κλάσεις ενδεχομένων.
(α)[2 μον.] Δείξτε ότι για κάθε $\mathcal{P} \subseteq \delta(\mathcal{D})$, η οικογένεια

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A \subseteq \Omega : \text{για κάθε } C \in \mathcal{P},\ A \cap C \in \delta(\mathcal{D})\}$$

είναι κλάση Dynkin στον Ω.
(β)[1 μον.] Έστω ότι $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$. Δείξτε ότι οι κλάσεις $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{D}_1$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ή 1.

Θέμα 2. **(α)[1 μον.]** Υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες $\mathbb{P}(X + Y = 0) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}(X = c) = \mathbb{P}(Y = -c) = 1$.
(β)[1 μον.] Αν οι X_n $(n \geq 1)$ είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές (καθεμία με πυκνότητα $f(x) = e^{-x},\ x > 0$), να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}(X_n > \log(n) \text{ για άπειρα } n) = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(X_n > 2\log(n) \text{ για άπειρα } n) = 0.$$

Θέμα 3. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει

$$\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \beta_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2\beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

όπου $0 \leq \beta_n \leq 1/2$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n / n$ συγκλίνει.
(α)[1 μον.] Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

(β)[1 μον.] Υπολογίστε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n})$, και δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left\{1 - 2\beta_j \left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{j}}{n} \cdot t\right)\right]\right\} = 1.$$

Θέμα 4. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει $\mathbb{P}(X_n \leq x) = 0$ για $x \leq -\sqrt{n}$, $\mathbb{P}(X_n \leq x) = 1$ για $x \geq \sqrt{n}$, και

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \frac{x + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}, \quad \text{για } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

[δηλαδή η X_n έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$].
(α)[2 μον.] Να διατυπώσετε τη συνθήκη του Lyapounov και να αποδείξετε ότι ικανοποιείται για την ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$.
(β)[1 μον.] Τί μας εξασφαλίζει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα εφαρμοζόμενο στην παραπάνω ακολουθία;
(γ)[1 μον.] Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \frac{t}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz = \Phi(t),$$

και να συμπεράνετε ότι δεν ισχύει ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών (και φυσικά ούτε ο ισχυρός) για την ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!