ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011

ΘΕΜΑ 1. Οι $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι μη κενές κλάσεις ενδεχομένων ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α) Πότε η $\mathcal{D}$ καλείται κλάση Dynkin στον Ω;
(β) Δώστε τον ορισμό της ελάχιστης κλάσης Dynkin, $\delta(\mathcal{D})$, που παράγεται από την $\mathcal{D}$.
(γ) Πότε οι κλάσεις $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητες;
(δ) Αποδείξτε ότι αν οι κλάσεις $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι ανεξάρτητες τότε και οι κλάσεις $\delta(\mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2$ είναι ανεξάρτητες.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Θέτουμε $X = \sup_{n\geq 1} X_n$ και $A = \{\omega : X(\omega) < \infty\}$.
(α) Να δείξετε ότι $\mathbb{P}(A) = 0$ ή $\mathbb{P}(A) = 1$.
(β) Επίσης να αποδείξετε ότι $\mathbb{P}(A) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > \alpha)$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$, $\mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{2}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-\phi(t))dt$.
(β) Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και γνωρίζουμε ότι η X_1 ακολουθεί κανονική $N(-1, 4^2)$ και ότι η $Z = X_1 + X_2$ ακολουθεί κανονική $N(0, 5^2)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ποια κατανομή ακολουθεί η X_2;

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω ότι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \ldots$ έχουν πυκνότητες (ως προς το μέτρο Lebesgue)

$$f_{X_n}(x) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-2^{n-1}x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots . \quad \left[\text{Δηλ. } X_n \sim N\left(0, 2^{-n}\right).\right]$$

Για $n = 1, 2, \ldots$ θέτουμε $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n)$ και $s_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$. Να δείξετε ότι

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1) \quad \text{και} \quad S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

(β) Δείξτε ότι η ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ του ερωτήματος (α) δεν ικανοποιεί ούτε την συνθήκη του Lyapounov, ούτε καν την συνθήκη του Lindeberg, και εξηγήστε για ποιο λόγο αυτό δεν αντιβαίνει προς το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Feller.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!