ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

ΘΕΜΑ 1. (α) Αποδείξτε ότι αν οι απλές, μη-αρνητικές, τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(β) Δώστε παράδειγμα μη-αρνητικών απλών τυχαίων μεταβλητών X, Y που δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, αλλά επαληθεύουν την ισότητα $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(γ) Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3, X_4 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $Y_1 = f(X_1, X_2)$ και $Y_2 = f(X_3, X_4)$. Να δείξετε ότι οι Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α) Πότε λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη;
(β) Αποδείξτε ότι αν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$.
(γ) Αποδείξτε ότι αν υπάρχει σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{1+\delta} < \infty$ τότε η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim U(-1/n, 1/n)$, δηλ. $\mathbb{P}[X_n \leq x] = (nx+1)/2$, $x \in [-1/n, 1/n]$, $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 0$, $x \leq -1/n$, και $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1$, $x \geq 1/n$. Να δείξετε ότι

(α) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ και (β) $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

(γ) Θέτουμε $Y_n = 2I(X_n > 0) - 1$, δηλ. $Y_n = 1$ αν $X_n > 0$, $Y_n = -1$ διαφορετικά. Να δείξετε ότι

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.
(δ) Χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικές συναρτήσεις στο (γ), ή όπως αλλιώς προτιμάτε, να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{n\to\infty}(\cos(t/\sqrt{n}))^n$, $t \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim U(-1, 1)$, δηλ. $\mathbb{P}[X_n \leq x] = (x+1)/2$, $x \in [-1, 1]$, $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 0$, $x \leq -1$, και $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1$, $x \geq 1$. Να δείξετε ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} + \frac{X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_n^3}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.
(β) Αποδείξτε την εξής βελτιωμένη ανισότητα Markov για μία τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$: Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η ανισότητα $\mathbb{P}[X \geq \alpha] + 2\mathbb{P}[X \geq 3\alpha] \leq \mathbb{E}(X)/\alpha$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 3 μονάδες.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!