ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Θέμα 1. Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α)[1 μον.] Αν το B είναι ενδεχόμενο με $\mathbb{P}(B) = 1$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ισότητες $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cup B^c)$ για κάθε ενδεχόμενο A.
(β)[1 μον.] Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = g(X^2)$. Να αποδειχθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}[g(X^2) = t] = 1$ [δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : g(X^2(\omega)) = t\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = t\}$ να έχει πιθανότητα 1].
(γ)[1 μον.] Ας υποθέσουμε ότι $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ και $\mathbb{P}(A) = N(A)/3$, $A \subset \Omega$, όπου $N(A) =$ πλήθος στοιχείων του A. Θέτουμε $X(\omega) = \omega$, $\omega = -1, 0, 1$ και $g(s) = s(1-s)$, $s \in \mathbb{R}$. Είναι οι X και $Y = g(X^2)$ ανεξάρτητες;

Θέμα 2. (α)[1 μον.] Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_n) \to \alpha \in \mathbb{R}$ και $\operatorname{Var}(X_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \alpha$.
(β)[1 μον.] Να κατασκευάσετε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής δύο ιδιότητες: (i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, και (ii) $\mathbb{E}(X_n) \to 1$. Εξετάστε αν γίνεται επιπροσθέτως να ισχύει και η ιδιότητα: (iii) $\operatorname{Var}(X_n) \to 0$.

Θέμα 3. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει

$$\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \beta_n, \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - 2\beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

όπου $0 \leq \beta_n \leq 1/2$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει.
(α)[1 μον.] Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

(β)[1 μον.] Υπολογίστε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\phi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$, και δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t,

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{n} \left\{1 - 2\beta_j \left[1 - \cos\left(\frac{j}{n} \cdot t\right)\right]\right\} = 1.$$

Θέμα 4. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma_n^2 > 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ με $\operatorname{Var}[S_n] = s_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. **(α)[1 μον.]** Διατυπώστε τη συνθήκη του Lyapounov, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή. **(β)[1 μον.]** Διατυπώστε τη συνθήκη του Lindeberg, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή. **(γ)[1 μον.]** Αποδείξτε ότι η ισχύς της συνθήκης του Lyapounov συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης του Lindeberg. **(δ)[1 μον.]** Αποδείξτε ότι η ισχύς της συνθήκης του Lindeberg μας εξασφαλίζει τη συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών, δηλαδή ότι $\max_{1 \leq j \leq n}\{\sigma_j^2\}/s_n^2 \to 0$. **(ε)[1 μον.]** Αποδείξτε ότι η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική μικρότητα, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$, $\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(|X_j| \geq \epsilon s_n) \to 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!