ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. (α) Διατυπώστε το πρώτο και το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli, και αποδείξτε το πρώτο.
(β) Σε ακολουθία ρίψεων ενός συνηθισμένου ζαριού, θέτουμε $A_n = \{$στις δοκιμές υπ' αριθμόν $n+1, n+2, \ldots, 2n$, το ζάρι έφερε την ίδια ένδειξη$\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι με πιθανότητα ένα, μόνο πεπερασμένο πλήθος από τα A_n θα εμφανιστεί.
(γ) Αποδείξτε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη όταν και μόνο όταν οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ και $\sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $n \geq 2$.

Θέμα 2. (α) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_n) \to \alpha \in \mathbb{R}$ και $\operatorname{Var}(X_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\mathbf{p}} \alpha$.
(β) Να κατασκευάσετε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής δύο ιδιότητες: (i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{p}} 0$, και (ii) $\mathbb{E}(X_n) \to 1$. Εξετάστε αν γίνεται επιπροσθέτως να ισχύει και η ιδιότητα: (iii) $\operatorname{Var}(X_n) \to 0$.

Θέμα 3. (α) Αν $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, να αποδείξετε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_1, $\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}]$, ικανοποιεί την οριακή σχέση

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + i\mu t + o(t),$$

όπου $o(t)$ αυθαίρετη συνάρτηση (με μιγαδικές τιμές), τέτοια ώστε $\lim_{t\to 0} o(t)/t = 0$.
(β) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, για την οποία ισχύει ότι

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + i\mu t + o(t),$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ σταθερά, $\varphi_{X_1}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_1, και $o(t)$ αυθαίρετη συνάρτηση (με μιγαδικές τιμές), τέτοια ώστε $\lim_{t\to 0} o(t)/t = 0$. Αποδείξτε ότι καθώς $n \to \infty$,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu.$$

Θέμα 4. (α) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ και $\operatorname{Var}(X_n) = \sigma_n^2 > 0$ για κάθε n. Θέτουμε $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ και $s_n^2 = \operatorname{Var}(S_n)$. Διατυπώστε την συνθήκη του Lyapounov, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή.
(β) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, με πυκνότητες (ως προς το μέτρο Lebesgue)

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{2} n |x|^{n-1}, \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1).$$

Κάθε σωστή απάντηση σε οποιοδήποτε υποερώτημα από τα (α), (β) κ.λπ., βαθμολογείται με 1.5 μονάδα.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!