ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α)[1 μον.] Αν το B είναι ενδεχόμενο με $\mathbb{P}(B) = 1$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ισότητες $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cup B^c)$ για κάθε ενδεχόμενο A.
(β)[1 μον.] Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Βορελ μετρήσιμη συνάρτηση και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = g(X^2)$. Να αποδειχθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}[g(X^2) = t] = 1$ [δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : g(X^2(\omega)) = t\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = t\}$ να έχει πιθανότητα 1].
(γ)[1 μον.] Ας υποθέσουμε ότι $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ και $\mathbb{P}(A) = N(A)/3$, $A \subset \Omega$, όπου $N(A) =$ πλήθος στοιχείων του A. Θέτουμε $X(\omega) = \omega$, $\omega = -1, 0, 1$ και $g(s) = s(1-s)$, $s \in \mathbb{R}$. Είναι οι X και $Y = g(X^2)$ ανεξάρτητες;

Θέμα 2. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 0$ για $x \leq -n^{1/4}$, $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1$ για $x \geq n^{1/4}$, και

$$\mathbb{P}[X_n \leq x] = \frac{x + n^{1/4}}{2n^{1/4}}, \quad \text{για } -n^{1/4} \leq x \leq n^{1/4}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

[δηλαδή η X_n έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-n^{1/4}, n^{1/4})$].
(α)[2 μον.] Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών για την ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$, διατυπώνοντας σχετικό Θεώρημα και ελέγχοντας τις υποθέσεις του.
(β)[1 μον.] Υπολογίστε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\phi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$, και δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $t \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{t^n (n!)^{1/4}} \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{t}{n} j^{1/4}\right) = 1.$$

Θέμα 3. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 0$ για $x \leq -\sqrt{n}$, $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1$ για $x \geq \sqrt{n}$, και

$$\mathbb{P}[X_n \leq x] = \frac{x + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}, \quad \text{για } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

[δηλαδή η X_n έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$].
(α)[2 μον.] Να διατυπώσετε τη συνθήκη του Lyapounov και να αποδείξετε ότι ικανοποιείται για την ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$.
(β)[1 μον.] Τι μας εξασφαλίζει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα εφαρμοζόμενο στην παραπάνω ακολουθία;
(γ)[1 μον.] Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t\sqrt{6}} e^{-z^2/2} dz = \Phi(t\sqrt{6}),$$

και να συμπεράνετε ότι δεν ισχύει ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών (και φυσικά ούτε ο ισχυρός) για την ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!