ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2020

ΘΕΜΑ 1. (α) Διατυπώστε το Θεώρημα Dynkin.
(β) Αποδείξτε τον παρακάτω ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα: ¨Αν $\mathcal{D}$ είναι μία μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω για την οποία $\delta(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D})$ τότε η $\mathcal{D}$ είναι π-σύστημα (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές)¨.

ΘΕΜΑ 2. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ. Αποδείξτε:

(α) Για κάθε $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{2}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-\phi(t))dt.$$

(β)

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-Re(\phi(t))}{t^2}dt,$$

όπου $Re(\phi(t))$ το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\phi(t)$ (η ισότητα ισχύει ακόμα και αν $\mathbb{E}|X| = +\infty$).

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{P}(X \geq r) = \mathbb{P}(Y \geq r)$ για κάθε ρητό πραγματικό αριθμό r. Να δειχθεί ότι οι X, Y είναι ισόνομες.
(β) Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{E}f(X) = \mathbb{E}f(Y)$ για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι X, Y είναι ισόνομες.

ΘΕΜΑ 4. (α) Διατυπώστε τις συνθήκες Lindeberg και Lyapounov για ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

(β) Κατασκευάστε παράδειγμα ανεξάρτητης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών για την οποία ικανοποιείται η συνθήκη του Lindeberg αλλά δεν ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ $1\frac{1}{2}$ ΩΡΑ.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!