ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2019

ΘΕΜΑ 1. Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α) Να δείξετε ότι η Y είναι $\sigma(X)$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $Y = g(X)$ για κάποια Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(β) Οι X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\mathbb{P}(X > r_1, Y \le r_2) = \mathbb{P}(X > r_1)\mathbb{P}(Y \le r_2)$ για κάθε ζεύγος ρητών (r_1, r_2).
(γ) Δείξτε ότι μία κλάση $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγερβρα στον Ω αν και μόνο αν είναι λ-κλάση στον Ω και π-σύστημα.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α) Πότε λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n,\ n \ge 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη;
(β) Αποδείξτε ότι αν η $\{X_n,\ n \ge 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$.
(γ) Αν η $\{X_n,\ n \ge 1\}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη με $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, να αποδείξετε ότι οι δειγματικοί μέσοι $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ συγκλίνουν στον L^1 προς τη σταθερά μ, δηλ., $\lim_n \mathbb{E}\left\{\left|\overline{X}_n - \mu\right|\right\} = 0$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, σταθερά. Δείξτε ότι $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = c$.
(β) Έστω F_1, F_2 δύο συναρτήσεις κατανομής, και $F = (F_1 + F_2)/2$. Να δείξετε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής, και μάλιστα,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g(x)dF_1(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g(x)dF_2(x) \tag{1}$$

για κάθε φραγμένη Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε επίσης ότι η συγκεκριμένη F είναι η μόνη συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί την (1) για κάθε φραγμένη Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Επίσης, να υπολογίσετε την χαρακτηριστική συνάρτηση φ της F συναρτήσει των χαρακτηριστικών συναρτήσεων φ_1, φ_2 των F_1, F_2.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_n) = 0$ και $\mathbb{E}(X_n^2) = \sigma_n^2 \in (0, \infty)$ για κάθε n. Να δείξετε ότι αν η $\{X_n,\ n \ge 1\}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lyapounov, τότε (i) ικανοποιεί και την συνθήκη του Lindeberg, και (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 = \infty$. Τι συμπεραίνετε στην ειδική περίπτωση που η X_n ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-1/n, 1/n)$;
(β) Η τριγωνική ακολουθία $\{X_{nj},\ n \ge 1,\ j = 1, \ldots, n^2\}$ αποτελείται από ανεξάρτητες γραμμές (δηλ. οι $\{X_{nj},\ j = 1, \ldots, n^2\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές), και $\mathbb{P}(X_{nj} = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_{nj} = 0)$ για κάθε n και j. Αν $\lim_n n^2 p_n = \lambda > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n^2} X_{nj} = \kappa\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!