ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2018

ΘΕΜΑ 1. (α) Δώστε τον ορισμό της λ-κλάσης και της κλάσης Dynkin, και αποδείξτε ότι κάθε λ-κλάση είναι κλάση Dynkin.
(β) Αποδείξτε ότι μία κλάση υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγεβρα στον Ω αν και μόνο αν είναι κλάση Dynkin στον Ω και π-σύστημα (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές).
(γ) Αποδείξε πλήρως ότι αν η $\{A_n, n \geq 1\}$ είναι μία ανεξάρτητη ακολουθία ενδεχομένων τότε τα ενδεχόμενα $A := \cap_{n=1}^{\infty} A_{2n}$ και $B := \cup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}$ είναι ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ 2. Θεωρούμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α) Αποδείξτε ότι αν για κάθε $\epsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$ συγκλίνει τότε $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
(β) Ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ στην ειδική περίπτωση που η X_n είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(-1/n, 1/n)$;
(γ) Αποδείξτε ότι αν υπαρχει τυχαία μεταβλητή $|Y|$ με $|X_n| \leq |Y|$ $(n = 1, 2, \dots)$ και $\mathbb{E}|Y| < \infty$ τότε η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = 0$, να αποδείξετε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_1})$ της X_1 ικανοποιεί την οριακή σχέση

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi_{X_1}(t) - 1}{t} = 0.$$

(β) Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών για την οποία η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ_{X_1} της X_1 ικανοποιεί την οριακή σχέση που δίνεται στο (α). Δείξτε ότι, καθώς $n \to \infty$, οι δειγματικοί μέσοι $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα στο μηδέν.

ΘΕΜΑ 4. Για τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots$ ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_j) = 0$, $\operatorname{Var}(X_j) = j^2/3$, και ότι κάθε X_j ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο (πεπερασμένο) διάστημα των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov για $\delta = 2$, και αποδείξτε ότι

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!