ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Δώστε τους ορισμούς της λ-κλάσης και της κλάσης Dynkin στον Ω, και αποδείξτε ότι κάθε λ-κλάση είναι κλάση Dynkin.

(β) Δώστε τον ορισμό της ελάχιστης κλάσης Dynkin, $\delta(\mathcal{D})$, που παράγεται από την $\mathcal{D}$, και αποδείξτε ότι αν οι $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι ανεξάρτητες τότε και οι $\delta(\mathcal{D}_1), \delta(\mathcal{D}_2)$ είναι ανεξάρτητες.

(γ) Διατυπώστε το Θεώρημα του Dynkin και αποδείξτε ότι αν δύο μέτρα πιθανότητας, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$, στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, έχουν την ιδιότητα

$$\mathbb{P}_1((-\infty, r]) = \mathbb{P}_2((-\infty, r]) \text{ για κάθε ρητό αριθμό } r$$

τότε $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$.

Θέμα 2ο. (α) Να αποδείξετε την ανισότητα Markov:
Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X και για κάθε $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}|X|/\varepsilon$.

(β) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι κατ᾽ ανάγκην ανεξάρτητη) για την οποία ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Να δειχθεί ότι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

(γ) Να κατασκευάσετε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής τρεις ιδιότητες: (i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, (ii) $\mathbb{E}(X_n) \to 2$ και (iii) $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε n. Επίσης δείξτε ότι τα (i) και (ii) δεν μπορούν να συμβούν (ταυτόχρονα) όταν $\sup_{n\geq 1}\{\mathbb{E}(X_n^2)\} < \infty$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$, $\mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{2}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-\phi(t))dt$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 τέτοιες ώστε η κατανομή της διαφοράς $X_1 - X_2$ να είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(-3, 3)$.

(γ) Αποδείξτε τον νόμο μεγάλων αριθμών του Khintchine: Αν $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και η χαρακτηριστική συνάρτηση, $\phi(t)$, της X_1, είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ με παράγωγο $\phi'(0) = i\mu$, τότε $(X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Υποθέτουμε ότι για κάθε n, οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbb{E}(X_1^{(n)}) = 0$ και $\mathrm{Var}(X_1^{(n)}) = 1$. Αποδείξτε ότι αν

$$X_1^{(n)} \xrightarrow{\text{d}} Y$$

όπου Y είναι κάποια τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$, τότε

$$(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)})/\sqrt{n} \xrightarrow{\text{d}} N(0,1).$$

(β) Υπολογίστε την χαρακτηριστική συνάρτηση της $Y_{1,\lambda} - Y_{2,\lambda}$ όταν οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $Y_{1,\lambda}, Y_{2,\lambda}$ ακολουθούν κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda > 0$. Στην συνέχεια αποδείξτε ότι αν για τις $X_i^{(n)}$ του ερωτήματος (α) ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_i^{(n)} = \pm\sqrt{n}) = 1/(2n)$, $\mathbb{P}(X_i^{(n)} = 0) = 1 - 1/n$, $i = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, τότε

$$(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)})/\sqrt{n} \xrightarrow{\text{d}} Y_{1,\lambda_0} - Y_{2,\lambda_0},$$

και να προσδιορίσετε την σταθερά λ_0. Γιατί αυτό το αποτέλεσμα δεν έρχεται σε αντίφαση με το (α);

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 3 μονάδες.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!