ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

ΘΕΜΑ 1. (α) Αποδείξτε ότι αν οι μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και $\mathbb{E}(X+Y)<\infty$ τότε $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(β) Δώστε παράδειγμα απλών μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών X, Y που ικανοποιούν την σχέση $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ χωρίς να είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.
(γ) Υποθέτουμε ότι οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με πεπερασμένη διασπορά. Αν οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1=X_1-X_2$ και $Y_2=X_3-X_1$ είναι ανεξάρτητες να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}(X_1=\alpha)=1$.

ΘΕΜΑ 2. Θεωρούμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n\geq 1\}$, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
(α) Τι σημαίνει ότι η $\{X_n,\ n\geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη; Διατυπώστε πλήρως το θεώρημα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας (και το αντίστροφό του).
(β) Αποδείξτε ότι αν υπαρχει τυχαία μεταβλητή $|Y|$ με $|X_n|\leq |Y|$ $(n=1,2,\ldots)$ και $\mathbb{E}|Y|<\infty$ τότε η $\{X_n,\ n\geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
(γ) Δώστε παράδειγμα μη ομοιόμορφα ολοκληρώσιμης ακολουθίας $\{X_n,\ n\geq 1\}$ με $\mathbb{E}|X_n|<\infty$ για κάθε n, για την οποία $X_n(\omega)\to 0$ για κάθε $\omega\in\Omega$ και $\mathbb{E}(X_n)\to 0$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και γνωρίζουμε ότι η X_1 ακολουθεί κανονική $N(2,16)$ και ότι η $Z=X_1-X_2$ ακολουθεί κανονική $N(-2,25)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ποια κατανομή ακολουθεί η X_2;
(β) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{P}(X=j)=1/5$, $j=-2,-1,0,1,2$. Εξετάστε αν υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 τέτοιες ώστε η διαφορά X_1-X_2 να έχει την ίδια κατανομή με αυτήν της X.
(γ) Αποδείξτε ότι αν οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες και η κατανομή της X_1 είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(-1,1)$, τότε, όποια και αν είναι η κατανομή της X_2, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_1+X_2 δεν μπορεί να είναι η τυποποιημένη κανονική, $N(0,1)$.
(δ) Έστω ότι οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ότι η κατανομή της X_3 είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $(-1,1)$. Αποδείξτε ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1=X_1+X_3$ και $Y_2=X_2+X_3$ είναι ισόνομες τότε και οι X_1, X_2 είναι ισόνομες.

ΘΕΜΑ 4. Για τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1,X_2,X_3,\ldots$ ισχύει ότι $\mathrm{Var}(X_j)=1$, $\mathbb{P}(X_j=-j)=p_j=\mathbb{P}(X_j=j)$, $\mathbb{P}(X_j=0)=1-2p_j$, $j=1,2,\ldots$. Για $n=1,2,\ldots$ θέτουμε $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
(α) Να δείξετε ότι $\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|\to 0$, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathrm{d}} 0$ και $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathrm{a.s.}} 0$.
(β) Δείξτε ότι η $\{X_n,\ n\geq 1\}$ δεν ικανοποιεί ούτε την συνθήκη του Lyapounov, ούτε καν την συνθήκη του Lindeberg.
(γ) Για $t\in\mathbb{R}$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n!)^2}\prod_{j=1}^{n}\left(j^2-1+\cos\left(\frac{jt}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!