ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ δύο τυχαίες μεταβλητές ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ μία μή κενή κλάση ενδεχομένων. Δώστε τον ορισμό των σ-αλγεβρών $\sigma(\mathcal{D})$, $\sigma(X_1)$ και $\sigma(X_1, X_2)$ και αποδείξτε τις σχέσεις $\sigma(X_1) = X_1^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και $\sigma(X_1, X_2) = \sigma(\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2))$.

(β) Θεωρήστε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ που περιγράφει το τυχαία πείραμα τριών ανεξαρτήτων ρίψεων ενός συνηθισμένου νομίσματος. Στον χώρο αυτόν ορίζουμε $X_1 = 1$ άν έρθει «Κ» στην πρώτη ρίψη, $X_1 = 0$ διαφορετικά, και $X_2 = 1$ άν τα αποτελέσματα στις δύο τελευταίες ρίψεις συμφωνούν, $X_2 = 0$ διαφορετικά. Να κατασκευάσετε τις σ-άλγεβρες $\sigma(X_1)$, $\sigma(X_2)$, $\sigma(X_1 - X_2)$ και $\sigma(X_1 \cdot X_2)$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$ και η Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} g(0)$. Μπορούμε να παρακάμψουμε την υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο 0 υποθέτοντας απλά ότι είναι Borel;

(β) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X_n^2}\right) \to 1$.

(γ) Αν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_1) = 0$ τότε $\mathbb{E}\left(\frac{n^2}{n^2+(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2}\right) \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

(δ) Αν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} 1$ τότε $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$, $\mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{2}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1 - \phi(t))dt$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 τέτοιες ώστε η κατανομή της διαφοράς $X_1 - X_2$ να είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(-1, 1)$.

(γ) Για $t \in (-1, 1)$ υπολογίστε τις τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\phi(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα $f_X(x) = e^{-|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\mathbb{E}(X_n^2) = \sigma_n^2 > 0$ και $\mathbb{E}|X_n|^3 < \infty$. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $s_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$ και $s_n = \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}$.

(α) Διατυπώστε την συνθήκη του του Lindeberg, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της ακολουθίας S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

(β) Αποδείξτε ότι αν η ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}|X_1|^3 + \mathbb{E}|X_2|^3 + \cdots + \mathbb{E}|X_n|^3}{s_n^3} = 0,$$

τότε ικανοποιείται και η συνθήκη του Lindeberg που αναφέρατε στο (α).

(γ) Αποδείξτε ότι η συνθήκη του Lindeberg συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2\}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2} = 0$, και συμπεράνατε από αυτήν ότι $s_n^2 \to \infty$ καθώς $n \to \infty$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 3 μονάδες.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!