ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

Σημείωση: Οι τυχαίες μεταβλητές (ή τα ενδεχόμενα) που περιέχονται σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα είναι ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και δεν είναι εκτεταμένες (παίρνουν πραγματικές τιμές).

1. Τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 είναι ανεξάρτητα και θέτουμε $\mathcal{A}_1 = \sigma(\{A_1, A_2, A_3\})$ και $\mathcal{A}_2 = \sigma(\{B_1, B_2\})$. Δείξτε ότι οι σ-άλγεβρες $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ είναι ανεξάρτητες, και συμπεράνατε ότι $\mathbb{P}(A_1^c A_2 A_3^c B_1^c B_2) = \mathbb{P}(A_1^c A_2 A_3^c)\mathbb{P}(B_1^c B_2)$.
[**Υπόδειξη:** Οι κλάσεις $\mathcal{D}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, A_1A_2A_3\}$ και $\mathcal{D}_2 = \{B_1, B_2, B_1B_2\}$ είναι π-συστήματα.]

2. Να αποδείξετε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν $\mathrm{Cov}[g_1(X_1), g_2(X_2)] = 0$ για οποιεσδήποτε αύξουσες συναρτήσεις $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ και $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.

3. Οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη διασπορά, δηλ. $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Αν οι $Y_1 = X_1 + X_3$ και $Y_2 = X_2 + X_3$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}[X_1 = \alpha] = 1$.

4. Διατυπώστε και αποδείξτε την ανισότητα Markov για μία τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$.

5. Αποδείξτε την εξής βελτιωμένη ανισότητα Markov για μία τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$: Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η ανισότητα $\mathbb{P}[X \geq \alpha] + \mathbb{P}[X \geq 2\alpha] \leq \mathbb{E}(X)/\alpha$.

6. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \geq 0$ για κάθε n, $\mathbb{E}[X_n] \leq 1$ για κάθε n, και $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$. Να δείξετε ότι $X \geq 0$ με πιθ. 1, ότι η X έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή και, μάλιστα, ότι $0 \leq \mathbb{E}[X] \leq 1$.

7. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $\mathbb{E}|X_n| \leq 1/n^2$ για κάθε n. Δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
[**Υπόδειξη:** Παρατηρήστε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq \epsilon]$ συγκλίνει.]

8. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}[X_1] = \alpha$.
[**Υπόδειξη:** Να δείξετε πρώτα ότι $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, και μετά ότι $\mathbb{P}[\limsup B_n] = 0$, όπου $B_n = \{\omega : |X_n(\omega)| \geq n\}$.]

9. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{P}[X_n = 2n+3] = \mathbb{P}[X_n = -2n+3] = 1/(4(n+1)^2)$, $\mathbb{P}[X_n = n+3] = \mathbb{P}[X_n = -n+3] = 1/(n+1)^2$ και $\mathbb{P}[X_n = 3] = 1 - 5/(2(n+1)^2)$ για κάθε n. Να δείξετε ότι η ακολουθία των δειγματικών μέσων συγκλίνει ισχυρά προς μία σταθερά α, την οποία και να προσδιορίσετε.

10. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη διασπορά, δηλ. $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Θέτουμε $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1]$. Θεωρούμε την ακολουθία δειγματικών διασπορών $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$, $n \geq 2$, όπου $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ η ακολουθία των δειγματικών μέσων. Να δείξετε ότι $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$.
[**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\overline{X_n})^2$.]

11. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $|X_n| \leq m_n < \infty$, $\mathbb{E}[X_n] = 0$ και $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma_n^2 > 0$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία m_n είναι αύξουσα, ότι $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \to +\infty$ και ότι $\dfrac{m_n^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2} \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Να δείξετε ότι $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}} \xrightarrow{\text{d}} N(0,1)$.
[**Υπόδειξη:** Αποδείξτε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov για $\delta = 2$.]

12. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim U(-n,n)$, δηλ. $\mathbb{P}[X_n \leq x] = (x+n)/(2n)$, $x \in [-n,n]$, $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 0$, $x \leq -n$, και $\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1$, $x \geq n$. Να δείξετε ότι $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0,\sigma^2)$, όπου $\sigma^2 > 0$ σταθερά, την οποία και να προσδιορίσετε.
[**Υπόδειξη:** Αποδείξτε ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounov για $\delta = 2$.]

Κάθε σωστή απάντηση σε οποιοδήποτε ερώτημα βαθμολογείται με 1.3 μονάδες.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!