ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΟΥΛΙΟΣ 2007

Θέμα 1ο. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $\mathfrak{D}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω.
(α) Πότε η $\mathfrak{D}$ καλείται σ-άλγεβρα στον Ω; Πότε η $\mathfrak{D}$ καλείται κλάση Dynkin στον Ω; Πότε η $\mathfrak{D}$ καλείται λ-κλάση στον Ω; Πότε η $\mathfrak{D}$ καλείται π-σύστημα;
(β) Δείξτε ότι η $\mathfrak{D}$ είναι λ-κλάση στον Ω αν και μόνο αν είναι κλάση Dynkin στον Ω.
(γ) Δείξτε ότι η $\mathfrak{D}$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω αν και μόνο αν η $\mathfrak{D}$ είναι ταυτόχρονα π-σύστημα και λ-κλάση στον Ω.
(δ) Διατυπώστε το Θεώρημα του Dynkin.
(ε) Αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ισόνομες, δηλ. αν $\mathbb{P}(X_1 \le t) = \mathbb{P}(X_2 \le t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\mathbb{P}(X_1 \in B) = \mathbb{P}(X_2 \in B)$ για κάθε Borel σύνολο B, $B \subset \mathbb{R}$.

Θέμα 2ο. (α) Να αποδείξετε την ανισότητα Markov στην εξής μορφή:
Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X και για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}|X|}{\varepsilon}.$$

(β) Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι κατ' ανάγκην ανεξάρτητη) για την οποία ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Να δειχθεί ότι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
(γ) Να κατασκευάσετε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \ge 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής δύο ιδιότητες: (i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$, και (ii) $\mathbb{E}(X_n) \to 0$.

Θέμα 3ο. Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$ και $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
(α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε την μεγιστική ανισότητα του Kolmogorov.
(β) Έστω ότι για την ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \ge 1\}$ ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε

$$Y_n = \frac{1}{n^2} \max\{|X_1|, |X_1 + X_2|, \ldots, |X_1 + X_2 + \cdots + X_n|\}, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Δείξτε ότι $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Θέμα 4ο. Έστω $\{X_n,\ n \ge 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ και $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 > 0$ για κάθε n. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $s_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$.
(α) Διατυπώστε την συνθήκη του του Lindeberg και την συνθήκη του Lyapounov, καθεμία από τις οποίες μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή.
(β) Έστω ότι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \ldots$ έχουν πυκνότητες (ως προς το μέτρο Lebesgue)

$$f_{X_n}(x) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-2^{n-1}x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots \ . \quad \left[\text{Δηλ. } X_n \sim N\left(0, 2^{-n}\right).\right]$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\text{d}} N(0,1) \quad \text{και} \quad S_n \xrightarrow{\text{d}} N(0,1).$$

(γ) Δείξτε επίσης ότι η ακολουθία $\{X_n,\ n \ge 1\}$ του ερωτήματος (β) δεν ικανοποιεί ούτε την συνθήκη του Lyapounov, ούτε καν την συνθήκη του Lindeberg, και εξηγήστε για ποιο λόγο αυτό δεν αντιβαίνει προς το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Feller.

Κάθε σωστή απάντηση σε οποιοδήποτε υποερώτημα από τα (α), (β) κ.λπ., βαθμολογείται με 1 μονάδα.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!