ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. (α) Διατυπώστε και αποδείξτε την μεγιστική ανισότητα του Kolmogorov για τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ με $\mathbb{E}[X_j] = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
(β) Αν $\alpha > 0$ και οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-1, 1)$, να βρείτε ένα άνω φράγμα της πιθανότητας

$$\mathbb{P}(\max\{|X_1|, |X_1 + X_2|, \ldots, |X_1 + X_2 + \ldots + X_n|\} \geq \alpha).$$

Θέμα 2. (α) Αν η $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής, έστω X, να δείξετε ότι και οι συναρτήσεις $\phi_1 = \bar{\phi}$, $\phi_2 = |\phi|^2 = \phi\bar{\phi}$, $\phi_3 = \phi^2$ και $\phi_4 = Re(\phi)$ είναι επίσης χαρακτηριστικές συναρτήσεις κάποιων τυχαίων μεταβλητών. Εξετάστε επίσης εάν η $Im(\phi)$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση.
(β) Μια τυχαία μεταβλητή X καλείται συμμετρική γύρω από τον αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$ εάν οι τυχαίες μεταβλητές $\mu - X$ και $X - \mu$ είναι ισόνομες. Να αποδείξετε ότι η X είναι συμμετρική γύρω από το $\mu = 0$ αν και μόνο αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση παίρνει μόνο πραγματικές τιμές.
(γ) Να αποδείξετε ότι αν οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι συμμετρικές γύρω από έναν αριθμό μ, τότε το άθροισμά τους $X_1 + \ldots + X_n$ είναι συμμετρικό γύρω από τον αριθμό $n\mu$.

Θέμα 3. (α) Αποδείξτε ότι αν $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ και η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} g(X)$.
(β) Αποδείξτε ότι αν $X_n \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} X$ και η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} g(X)$.
(γ) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. (i) Να βρεθεί σταθερά c τέτοια ώστε $(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/n} \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} c$. (ii) Βρείτε ακολουθίες σταθερών $\alpha_n \in \mathbb{R}$ και $\beta_n > 0$ τέτοιες ώστε $\alpha_n \cdot (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{\beta_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$, όπου Y η τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\log y)^2\right), \quad y > 0.$$

Θέμα 4. Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma_n^2 > 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ με $\mathrm{Var}[S_n] = s_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. (i) Διατυπώστε τη συνθήκη του Lyapounov, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή. (ii) Διατυπώστε τη συνθήκη του Lindemberg, η οποία μας εξασφαλίζει την κατά κατανομή σύγκλιση της S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή. (iii) Αποδείξτε ότι η ισχύς της συνθήκης του Lyapounov συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης του Lindemberg. (iv) Αποδείξτε ότι η ισχύς της συνθήκης του Lindemberg μας εξασφαλίζει τη συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών, δηλαδή ότι $\max_{1\leq j\leq n}\{\sigma_j^2\}/s_n^2 \to 0$. (v) Αποδείξτε ότι η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική μικρότητα, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$, $\max_{1\leq j\leq n} \mathbb{P}(|X_j| \geq \epsilon s_n) \to 0$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!