ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(α)[1 μον.] Να δοθεί ο ορισμός της ελάχιστης $\sigma-$άλγεβρας, $\sigma(X)$, που παράγεται από την X, καθώς και ο ορισμός της ελάχιστης $\sigma-$άλγεβρας, $\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$, που παράγεται από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
(β)[1 μον.] Αποδείξτε ότι για μια απλή τυχαία μεταβλητή X, η κανονική μορφή της οποίας είναι

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(\omega),$$

με $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $A_i A_i = \emptyset$ για $i \neq j$ και $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, ισχύει η ισότητα

$$\sigma(X) = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}),$$

και περιγράψτε τη μορφή ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου της $\sigma(X)$ σε αυτήν την περίπτωση.
(γ)[1 μον.] Να αποδειχθεί ότι για δυο ανεξάρτητες απλές τυχαίες μεταβλητές X και Y (που σε κανονική μορφή γράφονται $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(\omega)$ και $Y(\omega) = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}(\omega)$) ισχύει η ισότητα $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

Θέμα 2. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία ισχύει

$$\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \beta_n, \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - 2\beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

όπου $0 \leq \beta_n \leq 1/2$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει.
(α)[2 μον.] Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

(β)[1 μον.] Υπολογίστε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\phi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$, και δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left\{1 - 2\beta_j \left[1 - \cos\left(\frac{j}{n} \cdot t\right)\right]\right\} = 1.$$

Θέμα 3. Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, με $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$, $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ και $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma^2$, όπου $0 < \sigma^2 < \infty$. Για $n \geq 2$ θέτουμε

$$\overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_{(n)})^2, \quad S_{(n)} = \sqrt{S_{(n)}^2}.$$

Να δείξετε ότι
(α)[1 μον.] $(n-1)S_{(n)}^2 + n(\overline{X}_{(n)})^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$.
(β)[1 μον.] $S_{(n)}^2 \xrightarrow{\alpha.\varsigma.} \sigma^2$ και $S_{(n)} \xrightarrow{\alpha.\varsigma.} \sigma$, καθώς $n \to \infty$.
(γ)[1 μον.] $\sqrt{n}\,(\overline{X}_{(n)} - \mu)/S_{(n)} \xrightarrow{\delta} N(0,1)$, καθώς $n \to \infty$.
(δ)[1 μον.] $n\,(\overline{X}_{(n)} - \mu)^2/S_{(n)}^2 \xrightarrow{\delta} W$, καθώς $n \to \infty$, όπου W είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\Gamma(1/2, 1/2)$, δηλαδή με πυκνότητα $f_W(w) = (2\pi w e^w)^{-1/2}$, $w > 0$ [Η τυχαία μεταβλητή W ονομάζεται 'χι-τετράγωνο με 1 βαθμό ελευθερίας' και συμβολίζεται συνήθως με χ_1^2].

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!