

Πιθανότητες I
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016-Ομάδα Β

Θέμα 1. Θεωρούμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων ρίψεων ενός τίμιου τετραέδρου και έστω X ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανισθεί για 2η φορά η ένδειξη «1». Στη συνέχεια, από ένα κουτί που περιέχει 5 κόκκινα και 7 πράσινα σφαιρίδια, επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση X σφαιρίδια και έστω Y ο αριθμός των κόκκινων σφαιριδίων που επιλέγονται. Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(Y = 1)$.

Θέμα 2. α) Έστω X, Y ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη και μη μηδενική διασπορά. Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των $X + Y$ και $X - Y$, $\rho(X + Y, X - Y)$. Τι συμπεραίνετε για τις τυχαίες μεταβλητές $X + Y$ και $X - Y$;

β) Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Να δειχθεί ότι

$$\text{Cov}(X, E(Y|X)) = \text{Cov}(X, Y),$$

όπου $\text{Cov}(X, Y)$ η συνδιακύμανση των X, Y και $E(Y|X)$ η δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένης της X .

Θέμα 3. α) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n/3} \frac{3^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-3t} dt = \frac{1}{2}.$$

β) Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $a > 0$ σταθερά.

i) Βρείτε τη σταθερά a .

ii) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n = 1, 2, \dots$.

iv) Να αναλυθεί σε δυναμοσειρά η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X .

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!