

**Πιθανότητες I**  
**Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016-Ομάδα Α**

**Θέμα 1.** Θεωρούμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων ρίψεων ενός τίμιου τετραέδρου και έστω  $X$  ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανισθεί για 2η φορά η ένδειξη «3». Στη συνέχεια, από ένα κουτί που περιέχει 7 κόκκινα και 3 πράσινα σφαιρίδια, επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση  $X$  σφαιρίδια και έστω  $Y$  ο αριθμός των κόκκινων σφαιριδίων που επιλέγονται. Να υπολογισθεί η πιθανότητα  $P(Y = 1)$ .

**Θέμα 2.** α) Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Να δειχθεί ότι

$$\text{Cov}(X, E(Y|X)) = \text{Cov}(X, Y),$$

όπου  $\text{Cov}(X, Y)$  η συνδιακύμανση των  $X, Y$  και  $E(Y|X)$  η δεσμευμένη μέση τιμή της  $Y$  δεδομένης της  $X$ .

β) Έστω  $X, Y$  ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη και μη μηδενική διασπορά. Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των  $X + Y$  και  $X - Y$ ,  $\rho(X + Y, X - Y)$ . Τι συμπεραίνετε για τις τυχαίες μεταβλητές  $X + Y$  και  $X - Y$ ;

**Θέμα 3.** α) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n/2} \frac{2^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

β) Η  $X$  είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου  $c > 0$  σταθερά.

i) Βρείτε τη σταθερά  $c$ .

ii) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής  $F_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

iii) Να υπολογιστούν οι ροπές  $E(X^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

iv) Να αναλυθεί σε δυναμοσειρά η ροπογεννήτρια  $M_X(t)$  της  $X$ .

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**