

## ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018

**Θέμα 1.** (α) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να φέρει για πρώτη φορά την ένδειξη έξι, και έστω  $X$  η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των δοκιμών που απαιτούνται. Στην συνέχεια ρίχνουμε ένα συνηθισμένο νόμισμα  $X$  φορές, και έστω  $Y$  ο αριθμός των Κεφαλών (Κ) που θα φέρει το νόμισμα. Να βρείτε:

(i) τις δεσμευμένες μέσες τιμές  $\mathbb{E}(Y|X = x)$  και  $\mathbb{E}(Y^2|X = x)$  ( $x = 1, 2, \dots$ ),

(ii) τις  $\mathbb{E}(Y)$  και  $\text{Var}(Y)$ .

(β) Αποδείξτε τον τύπο

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, \mathbb{E}(Y|X))$$

για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  με πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, και συμπεράνατε την τιμή της  $\text{Cov}(X, Y)$  για τις  $X, Y$  του Ερωτήματος (α).

**Θέμα 2.** (α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια  $\mathbb{E}(e^{tX})$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$  όταν η  $X$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα( $a, 1$ ) ( $a > 0$ ), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}, \quad x > 0.$$

(β) Αν οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές Γάμμα( $2, 1$ ) και Γάμμα( $3, 1$ ), αντίστοιχα, να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Z = X + Y$  καθώς και όλες τις ροπές της  $Z$ ,  $\mathbb{E}(Z^n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

**Θέμα 3.** (α) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = e^{-2|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Υπολογίστε την συνάρτηση κατανομής, την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, την μέση τιμή και την διασπορά της  $Y = |X|$ .

(β) Υποθέτουμε ότι οι  $X_1, \dots, X_{64}$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α). Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα

$$\mathbb{P}\left(24 < |X_1| + \dots + |X_{64}| < 36\right).$$

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής,  $N(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(0.5) &= 0.6915, & \Phi(1) &= 0.8413, & \Phi(1.5) &= 0.9332, \\ \Phi(2) &= 0.9773, & \Phi(2.5) &= 0.9938, & \Phi(3) &= 0.9987. \end{aligned}$$

Διάρκεια  $2\frac{1}{2}$  ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!