B

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρείτε:

(α) την πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 1 και

(β) την πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 1 και να μην εμφανιστεί καθόλου ο αριθμός 6.

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Μιά κάλπη περιέχει 10 σφαιρίδια από τα οποία τα 4 είναι μαύρα και τα 6 είναι άσπρα. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το επιστρέφουμε στην κάλπη, και προσθέτουμε άλλα 90 που έχουν το ίδιο χρώμα με αυτό που επιλέξαμε. Έπειτα επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από την κάλπη (με την νέα σύνθεση πλέον).

(α) Ποια η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέγουμε στο τέλος να είναι άσπρο;

(β) Αν το σφαιρίδιο που επιλέγουμε στο τέλος είναι άσπρο, ποιά είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέξαμε αρχικά να είναι μαύρο;

Θέμα 3.(25 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{15}x^3, & x \in (1,2), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = X^2$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή της Y.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

(γ) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$, των X και Y.

Θέμα 4.(25 Βαθμοί) Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και πιθανογεννήτρια

$$P_X(t) := E(t^X) = \frac{1}{4}e^{5(t-1)} + ce^{2(t-1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου c είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η τιμή του c.

(β) Οι $E(X), V(X)$.

(γ) Η πιθανογεννήτρια της $3X$.

Θέμα 5.(25 Βαθμοί) (α) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{αν } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^k)$ για $k \in \mathbb{N}$, και να δειχθεί ότι $V(X^2) = \frac{12}{175}$.

(β) Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α). Θέτουμε $T = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2100}^2$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(T \in (1248, 1284))$.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0,1)$:

$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$,
$\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, $\Phi(3) = 0.9987$.

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**